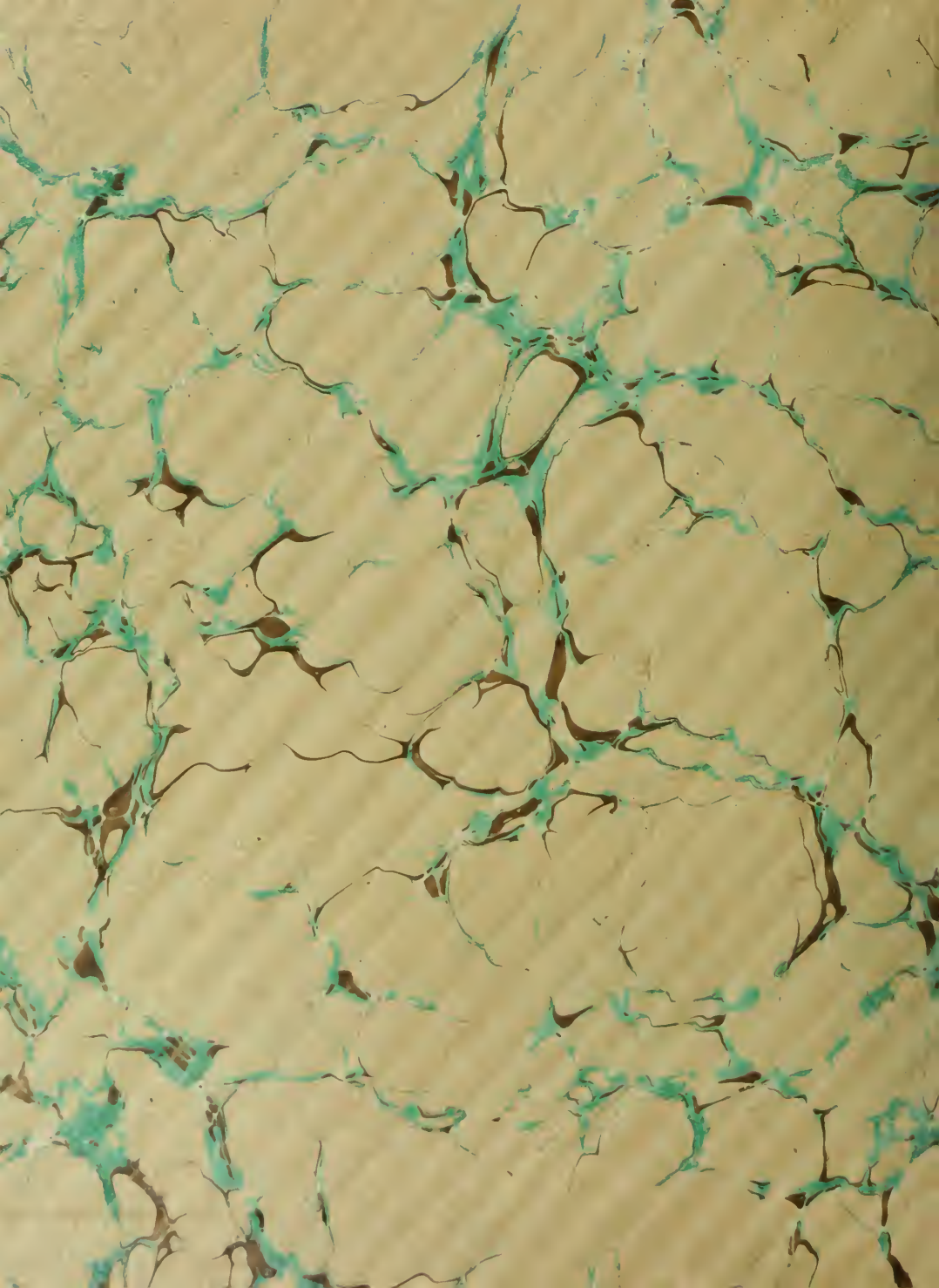


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s3journaldemat01liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INGÉNIEUR DES MINES,
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE,

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

TOME PREMIER. — ANNÉE 1875.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1875

QK
1
J684
Sér. 3
t. 1

20196
e.

Le Savant illustre qui a fondé le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* en 1836 a pris la décision définitive de renoncer à la rédaction de ce Recueil à partir de 1875, malgré les instances qui lui ont été adressées, malgré les regrets du monde savant.

Nous n'aurions pas osé reprendre, à nous seul, le travail ainsi interrompu; mais le concours actif que nous ont assuré plusieurs Savants distingués peut faire espérer que nous ne resterons pas trop au-dessous de notre tâche. N'est-ce pas d'ailleurs faire œuvre utile que de contribuer à maintenir la publication de ce Journal, alors que les Recueils du même ordre sont si rares en France et que nos Savants éprouvent tant de difficultés à faire paraître leurs Mémoires.

Au moment où prend fin, avec la deuxième Série du Journal, le travail poursuivi pendant trente-neuf années par M. Liouville, dans le but unique d'être utile à la Science et à son pays, nous sommes l'interprète de tous en exprimant ici les sentiments d'admiration et de reconnaissance qu'inspire une œuvre aussi considérable.

H. RESAL,
Membre de l'Institut.

Janvier 1875.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la stabilité de l'équilibre d'un solide pesant posé sur un appui courbe;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Les conditions de stabilité établies dans ce Mémoire sont les suivantes :

1° *Le centre de gravité du corps mobile* C′ *doit être situé au-dessous des centres de courbure de la surface extérieure* S′;

2° *Les courbures minimum et maximum* A′ *et* B′ *de la surface* S′ *doivent être respectivement de même signe que les courbures minimum et maximum* A *et* B *de la surface de l'appui.*

Nous prouvons dans la Section I que ces conditions sont suffisantes, en établissant que, si elles sont satisfaites, le centre de gravité de C′ ne peut s'abaisser.

Cette démonstration présente cette particularité, qu'elle exige la considération des infiniment petits du quatrième ordre, dans le cas où $A' < B$. Au contraire, on peut s'arrêter au second ordre si $A' > B$.

Ces deux cas se distinguent d'ailleurs, au point de vue mécanique, par une différence essentielle. Si $A' > B$, le solide pourra pivoter sur

son appui avec une liberté complète. Dans le second cas, au contraire, il existe un azimut que sa rotation ne saurait franchir sans qu'il pénétrât dans l'appui.

Dans la Section II, nous établissons les équations qui régissent les oscillations du solide, supposées infiniment petites. Ces équations sont linéaires. Leurs coefficients sont des fonctions périodiques du temps, variant avec une extrême lenteur. Nous démontrons que, en se renfermant dans les limites de temps où cette variation des coefficients peut être négligée, l'amplitude des oscillations croîtrait au delà de toute limite, si les deux conditions ci-dessus n'étaient pas remplies. Elles sont donc nécessaires à la stabilité.

Ces conditions étant supposées satisfaites, les équations à coefficients périodiques, dont nous venons de parler, régiront le phénomène des petites oscillations pendant toute la durée du mouvement, si $A' > B$. Au contraire, si $A' < B$, on pourra distinguer trois périodes successives de mouvement, régies par des équations de forme différente.

Nous terminons en montrant que le problème des petites oscillations peut être ramené à des équations linéaires à coefficients constants, et, par suite, intégré complétement dans les deux cas suivants :

1° Si l'appui est de révolution;

2° Si le solide mobile est de révolution (par sa constitution intérieure, comme par sa surface extérieure).

ANALYSE.

I

1. Soit C′ un solide pesant mobile, reposant par un de ses points O sur un appui fixe C. Pour qu'il soit en équilibre, il sera nécessaire et suffisant que le plan tangent commun aux deux solides soit horizontal, et que le point G, centre de gravité de C′, soit situé sur la verticale du point O.

Soient respectivement S et S′ les surfaces qui limitent les corps C et C′. Nous prendrons pour centre des coordonnées le point O; pour

axe des z la verticale ascendante OZ; pour axes des x et des y les tangentes OX, OY aux sections normales à la surface S, dont les courbures sont minimum et maximum. En désignant par A et B ces deux courbures, l'équation de la surface S dans les environs du point O se réduira sensiblement à

$$(1) \qquad 2z = Ax^2 + By^2.$$

Soient de même OX′, OY′ les tangentes aux sections normales de courbure minimum et maximum dans la surface S′; si l'on désigne par A′ et B′ ces deux courbures, et par φ l'angle de OX′ avec OX, l'équation de la surface S′ dans les environs du point O se réduira sensiblement à

$$(2) \qquad 2z = A'(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + B'(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2.$$

D'ailleurs C′ doit reposer sur C sans le pénétrer. Donc l'ordonnée de S′ doit être partout au moins égale à celle de S. Comparant en particulier les ordonnées qui correspondent à $x = 0$, il viendra

$$B \overset{=}{<} A'\sin^2\varphi + B'\cos^2\varphi$$

ou, comme on a, par hypothèse, $A' \overset{=}{<} B'$,

$$B \overset{=}{<} B'(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \overset{=}{<} B'.$$

Posons, d'autre part, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ et comparons les ordonnées correspondantes; il viendra

$$A' \overset{=}{>} A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi \overset{=}{>} A(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \overset{=}{>} A.$$

On aura donc les deux conditions suivantes :

$$(3) \qquad A' \overset{=}{>} A, \quad B' \overset{=}{>} B.$$

Si ces deux conditions sont satisfaites, on pourra effectivement poser C′ sur C sans que ces deux corps se pénètrent. En effet, orien-

tons C′ de telle sorte qu'on ait $\varphi = 0$; l'équation de S′ deviendra

$$2z = A'x^2 + B'y^2,$$

et la différence entre les ordonnées correspondantes de S′ et de S sera

$$(A' - A)x^2 + (B' - B)y^2,$$

quantité qui ne saurait être négative.

2. Ici deux cas seront à distinguer :

1° Si $A' > B$, on pourra faire pivoter S′ d'un angle quelconque φ autour de la verticale OZ sans que la pénétration se produise; car donnons à φ une valeur quelconque et faisons passer par OZ un plan quelconque : il coupera S suivant une ligne L dont la courbure sera au plus égale à B, et S′ suivant une ligne L′ dont la courbure sera au moins égale à A. Donc la ligne L′, ayant une plus grande courbure que L, sera située au-dessus de cette dernière.

3. 2° Au contraire, si $A' < B$, l'angle φ ne pourra dépasser une limite que nous allons déterminer :

La différence des ordonnées des deux surfaces S′ et S est égale à

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &A'(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + B'(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 - Ax^2 - By^2 \\ &\quad = (A'\cos^2\varphi + B'\sin^2\varphi - A)x^2 + 2(A' - B')\sin\varphi\cos\varphi\, xy \\ &\qquad + (A'\sin^2\varphi + B'\cos^2\varphi - B)y^2, \end{aligned}\right.$$

expression qui doit être $\geqq 0$, quel que soit le rapport de x à y.

On a d'ailleurs

$$A'\cos^2\varphi + B'\sin^2\varphi - A \geqq A' - A \geqq 0.$$

Donc, pour que l'expression (4) ne puisse pas devenir négative, il sera nécessaire et suffisant que le déterminant

$$(A' - B')^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - (A'\cos^2\varphi + B'\sin^2\varphi - A)(A'\sin^2\varphi + B'\cos^2\varphi - B)$$

soit $\geqq 0$.

Effectuant les calculs et réduisant, cette expression deviendra

$$(5)\qquad -(A' - A)(B' - B) + (B' - A')(B - A)\sin^2\varphi \geqq 0.$$

Donc l'angle φ ne devra pas dépasser en valeur absolue l'angle λ, défini par l'équation

$$\sin^2\lambda = \frac{(A' - A)(B' - B)}{(B' - A')(B - A)}. \tag{6}$$

4. Ces préliminaires posés, supposons que C′ soit placé en équilibre sur C, et de telle sorte que OX′, OY′ coïncident avec OX et OY. Donnons à C′ un mouvement virtuel infiniment petit, qui le laisse en contact avec l'appui C, et cherchons à évaluer quelle sera, après le mouvement, la position d'un point de C′, dont les coordonnées initiales étaient des quantités données X, Y, Z.

5. Soient P le point de C par lequel le contact se fait après le mouvement effectué; x, y, z ses coordonnées; $P\zeta$ la normale ascendante à la surface S au point P; $P\xi$, $P\eta$ les tangentes aux sections normales de courbure minimum et maximum; A_1, B_1 les courbures correspondantes; a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 les cosinus directeurs des trois droites $P\xi$, $P\eta$, $P\zeta$.

Soient, d'autre part, P′ le point de C′ qui vient en contact avec le point P à la fin du mouvement; x', y', z' ses coordonnées initiales; $P'\zeta'$ la normale ascendante à la surface S′ au point P′; $P'\xi'$, $P'\eta'$ les tangentes aux sections normales de courbure minimum et maximum; A'_1, B'_1 les courbures correspondantes; a', b', c'; a'_1, b'_1, c'_1; a'_2, b'_2, c'_2 les cosinus directeurs des droites $P'\xi'$, $P'\eta'$, $P'\zeta'$.

A la fin du mouvement, $P'\zeta'$ sera venue s'appliquer sur $P\zeta$; $P'\xi'$ et $P'\eta'$ seront venues se placer dans le plan tangent à S au point P, et formeront respectivement avec $P\xi$ et $P\eta$ un certain angle, que nous désignerons par γ.

6. Cela posé, considérons le point Q, dont les coordonnées initiales sont X, Y, Z. Ses coordonnées ξ', η', ζ' par rapport aux axes $P'\xi'$, $P'\eta'$, $P'\zeta'$ seront données par les formules connues

$$\left\{\begin{aligned} \xi' &= a'(X - x') + b'(Y - y') + c'(Z - z'),\\ \eta' &= a'_1(X - x') + b'_1(Y - y') + c'_1(Z - z'),\\ \zeta' &= a'_2(X - x') + b'_2(Y - y') + c'_2(Z - z'). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ces nouveaux axes étant entraînés par le mouvement du corps C', les coordonnées ξ', η', ζ' ne seront pas modifiées par ce mouvement, et les coordonnées finales de Q par rapport aux axes Pξ, Pη, Pζ seront données par les formules

$$(8)\qquad \xi = \xi'\cos\gamma + \eta'\sin\gamma,\quad \eta = -\xi'\sin\gamma + \eta'\cos\gamma,\quad \zeta = \zeta'.$$

Enfin ses coordonnées finales par rapport à OX, OY, OZ seront

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= x + a\xi + a_1\eta + a_2\zeta,\\ Y_1 &= y + b\xi + b_1\eta + b_2\zeta.\\ Z_1 &= z + c\xi + c_1\eta + c_2\zeta.\end{aligned}\right.$$

7. Appliquons ces formules au calcul du déplacement vertical du centre de gravité G.

Les coordonnées initiales de ce point étant o, o, h, sa hauteur finale h_1 sera donnée par la formule

$$\begin{aligned} h_1 &= z + c\xi + c_1\eta + c_2\zeta\\ &= z + c(\xi'\cos\gamma + \eta'\sin\gamma) + c_1(-\xi'\sin\gamma + \eta'\cos\gamma) + c_2\zeta',\end{aligned}$$

ξ', η', ζ' étant fournis par les équations (7) lorsqu'on y pose $X = Y = o$, $Z = h$.

Substituant ces valeurs dans la formule précédente, on trouve pour le déplacement vertical $h_1 - h$ du centre de gravité l'expression suivante :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} h_1 - h = z &+ (c\cos\gamma - c_1\sin\gamma)[-a'x' - b'y' + c'(h - z')]\\ &+ (c\sin\gamma + c_1\cos\gamma)[-a'_1x' - b'_1y' + c'_1(h - z')]\\ &+ c_2[-a'_2x' - b'_2y' + c'_2(h - z')] - h.\end{aligned}\right.$$

Pour achever le calcul, il reste à exprimer z, z' et les coefficients angulaires a, b, c,..., a'_2, b'_2, c'_2 en fonction des variables indépendantes x, y, x', y', γ.

En nous bornant provisoirement aux termes du second ordre par rapport à x, y, x', y', nous aurons

$$(11)\qquad z = \frac{Ax^2 + By^2}{2},\quad z' = \frac{A'x'^2 + By'^2}{2}.$$

D'autre part, $P\xi$, $P\eta$, $P\zeta$, ainsi que $P'\xi'$, $P'\eta'$, $P'\zeta'$, sont sensiblement parallèles à OX, OY, OZ; donc b, c, a_1, c_1, a_2, b_2 et b', c', a'_1, c'_1, a'_2, b'_2 sont infiniment petits, et a, b_1, c_2, a', b'_1, c'_2 seront très-voisins de l'unité. D'après cette remarque, la valeur de $h_1 - h$ se réduira, en négligeant le troisième ordre, à la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 - h = z &+ (c\cos\gamma - c_1\sin\gamma)(-x' + c'h) \\ &+ (c\sin\gamma - c_1\cos\gamma)(-y' + c'_1 h) \\ &- a'_2 x' - b'_2 y' - z' + (c_2 c'_2 - 1)h, \end{aligned}\right.$$

les cosinus directeurs qui subsistent dans la formule devant être calculés jusqu'au premier ordre, sauf c_2 et c'_2 pour lesquels on devra aller jusqu'au second ordre.

8. Or désignons, suivant l'usage, par p, q les dérivées partielles de z par rapport à x et y. La droite $P\xi$ se trouvant dans le plan tangent à S, ses cosinus directeurs satisfont à la relation

$$(13)\qquad c = pa + qb, \quad \text{d'où} \quad c = Ax,$$

en remplaçant p, q, a et b par leurs valeurs approchées Ax, By, 1 et 0. On trouvera de même

$$(14)\qquad c_1 = By, \quad c' = A'x', \quad c'_1 = B'y'.$$

D'autre part, $P'\zeta'$ est normale à S'; on aura donc, en désignant par p', q' les dérivées partielles de z' par rapport à x', y',

$$(15)\quad a'_2 = -\frac{p'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}, \quad b'_2 = -\frac{q'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}, \quad c'_2 = \frac{1}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}},$$

expressions qui se réduiront à

$$(16)\qquad a'_2 = -A'x', \quad b'_2 = -B'y', \quad c'_2 = 1 - \frac{A'^2x'^2 + B'^2y'^2}{2};$$

en remplaçant p', q' par leurs valeurs approchées $A'x'$, $B'y'$.

On trouve enfin, de la même manière,

$$(17)\qquad c_2 = 1 - \frac{A^2x^2 + B^2y^2}{2}.$$

Substituant pour z, z' et les cosinus directeurs les valeurs que nous venons de trouver, la formule (12) deviendra, en s'arrêtant toujours au second ordre,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 - h = {} & \frac{Ax^2 + By^2}{2} + (Ax\cos\gamma - By\sin\gamma)(-1 + A'h)x' \\ & + (Ax\sin\gamma + By\sin\gamma)(-1 + B'h)y' + \frac{A'x'^2 + B'y'^2}{2} \\ & - h\left(\frac{A^2x^2 + B^2y^2}{2} + \frac{A'^2x'^2 + B'^2y'^2}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Cette expression peut se mettre sous la forme suivante :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 - h = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A'} - h\right)(A'x' - Ax\cos\gamma + By\sin\gamma)^2 \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B'} - h\right)(B'y' - Ax\sin\gamma - By\cos\gamma)^2 \\ & + \frac{1}{2M}(Mx + Ny)^2 + \frac{D}{2M}y^2, \end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$(20)\quad M = A - \frac{A^2\cos^2\gamma}{A'} - \frac{A^2\sin^2\gamma}{B'} = \frac{A}{A'}\left[A' - A + \frac{A}{B'}(B' - A')\sin^2\gamma\right],$$

$$(21)\quad N = \left(\frac{AB}{A'} - \frac{AB}{B'}\right)\sin\gamma\cos\gamma,$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} D &= M\left(B - \frac{B^2\cos^2\gamma}{B'} - \frac{B^2\sin^2\gamma}{A'}\right) - N^2 \\ &= \frac{AB}{A'B'}[(A' - A)(B' - B) - (B - A)(B' - A')\sin^2\gamma]. \end{aligned}\right.$$

9. On sait que l'équilibre sera stable si $h_1 - h$ est constamment positif, quels que soient x, y, x', y', γ. Faisons d'abord $\gamma = 0$. Pour que les quatre carrés que contient $h_1 - h$ soient positifs, il faudra qu'on ait

$$(23)\quad \frac{1}{A'} - h > 0,\quad \frac{1}{B} - h > 0,\quad \frac{A}{A'} > 0,\quad \frac{B}{B'} > 0;$$

car $A' - A$ et $B' - B$ sont positifs.

Ces conditions expriment :

1° *Que le point* G *est situé au-dessous des centres de courbure de la surface* S';

2° *Que les deux courbures principales de* S' *ont respectivement le même signe que les courbures correspondantes de* S.

Nous allons prouver que, si ces conditions sont satisfaites, $h_1 - h$ sera toujours positif, ce qui assurera, comme on sait, la stabilité de l'équilibre.

Deux cas seront à distinguer dans cette démonstration.

10. *Premier cas.* — Si $A' > B$, la quantité positive $(A' - A)(B' - B)$ sera plus grande que $(B - A)(B' - A')$, et *a fortiori* plus grande que $(B - A)(B' - A')\sin^2\gamma$. Donc D sera positif. D'autre part, A et B' sont de même signe. Car, si l'on avait

$$(24) \qquad A < 0, \quad B' > 0,$$

on aurait, en vertu des relations (23),

$$A' < 0, \quad B > 0, \quad \text{d'où} \quad A' < B,$$

contrairement à l'hypothèse. Donc M aura tous ses termes positifs; donc $h_1 - h$ sera une somme de carrés positifs.

11. *Deuxième cas.* — Soit $A' < B$. L'angle γ ne pourra plus prendre toutes les valeurs possibles. En effet, en désignant par A_1, B_1 les courbures principales de S au point P et par A'_1, B'_1 les courbures principales de S' au point P', on a vu (5) que le corps C' pénétrerait le corps C si γ dépassait la limite λ_1, définie par l'équation

$$(25) \qquad \sin^2\lambda_1 = \frac{(A'_1 - A_1)(B'_1 - B_1)}{(B'_1 - A'_1)(B_1 - A_1)},$$

limite qui diffère infiniment peu de la limite λ, définie par l'équation (6); car A_1, B_1, A'_1, B'_1 diffèrent infiniment peu de A, B, A', B'.

La quantité M sera constamment positive; car, si $\frac{A}{B'}$ est positif, tous ses termes seront positifs; et si $\frac{A}{B'}$ est négatif, M sera minimum lorsque

γ atteindra sa valeur maximum λ_1; ce minimum sera sensiblement égal à

$$(26)\quad \frac{A}{A'}\left[A' - A + \frac{A}{B'}(B' - A')\frac{(A'-A)(B'-B)}{(B'-A')(B-A)}\right] = \frac{AB}{A'B'}\frac{(A'-A)(B'-A)}{B-A},$$

expression qui est un produit de facteurs positifs.

L'expression D sera également finie et positive, tant que γ sera sensiblement inférieur à λ; mais, pour les valeurs de γ infiniment voisines de sa limite λ_1 (laquelle est elle-même infiniment voisine de λ), D sera infiniment petit; cette valeur infiniment petite pourra même devenir négative, si $\lambda_1 > \lambda$.

Si, en même temps que γ se rapproche de sa limite, on donne à x, y, x', y' des valeurs telles, que les expressions $A'x' - Ax\cos\gamma + By\sin\gamma$, $B'y' - Ax\sin\gamma - By\cos\gamma$, $Mx + Ny$ soient des infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, les termes qui constituent, d'après l'équation (19), la valeur approchée de $h_1 - h$ seront d'un ordre supérieur au second, et pourront devenir comparables aux termes négligés. Pour déterminer avec précision le signe de $h_1 - h$, il sera donc nécessaire de pousser l'approximation à un ordre supérieur au second, où nous nous étions arrêtés jusqu'ici.

12. Ce calcul serait extrêmement compliqué s'il fallait l'exécuter pour deux surfaces quelconques S et S'. Mais voici une remarque qui permet de le simplifier :

Substituons aux deux surfaces données S et S' deux autres surfaces S_1, S'_1 qui leur soient tangentes au point O, et telles, que dans le voisinage de ce point S_1 soit au-dessous de S, et S'_1 au-dessus de S_1. Supposons que, en faisant mouvoir S'_1 sur S_1, $h_1 - h$ soit constamment positif; il en sera de même dans le mouvement de S' sur S.

Considérons en effet la surface mobile S' dans une quelconque de ses positions, et supposons qu'elle ait entraîné S'_1 dans son mouvement. Cette dernière surface étant au-dessus de S', qui repose sur S, laquelle est au-dessus de S_1, sera au-dessus de S_1. On pourra la rendre tangente à S_1 en l'abaissant d'une certaine quantité. Cela fait, $h_1 - h$ sera positif, par hypothèse. Donc il l'était *a fortiori* avant le dernier abaissement qu'on a fait subir au système.

13. Cela posé, admettons d'abord que les quatre courbures A, A′, B, B′ aient le même signe. On pourra, d'après la remarque précédente, substituer à la surface S une surface S_1, dont les courbures $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ soient du même signe que précédemment, mais toutes deux inférieures à A, cette nouvelle surface étant évidemment au-dessous de S dans les environs du point O. Or, si nous étudions le mouvement de S′ sur S_1, nous serons dans le premier cas déjà étudié; car $\mathcal{B}$ étant $<$ A sera *a fortiori* $<$ A′; on a d'ailleurs, par hypothèse,

$$(27)\qquad \frac{1}{A'} - h > 0, \quad \frac{1}{B'} - h > 0, \quad \frac{\mathcal{A}}{A'} > 0, \quad \frac{\mathcal{B}}{A'} > 0.$$

Donc $h_1 - h$ sera positif.

14. Il reste à considérer le cas où les courbures A, A′, B, B′ n'auraient pas toutes le même signe. La courbure B′ étant, par hypothèse, la plus grande des quatre, sera positive, et $\frac{B}{B'}$ étant positif, B sera également positive; au contraire, A et A′ seront négatives.

Cela posé, on peut substituer à la surface S une surface du second degré S_1 dont les courbures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient des quantités quelconques respectivement moindres que A et B, mais de même signe que ces dernières quantités. La quantité $\mathcal{A}$, étant simplement assujettie à être comprise entre A et $-\infty$, sera négative, et pourra avoir une valeur absolue aussi grande que l'on voudra.

On peut substituer, d'autre part, à S′ une surface du second degré dont les courbures $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ soient plus grandes que A′ et B′ et de même signe que ces quantités, et satisfassent en outre aux relations

$$(28)\qquad \frac{1}{\mathcal{A}'} - h > 0, \quad \frac{1}{\mathcal{B}'} - h > 0.$$

$\mathcal{B}'$ pourra être pris aussi grand que l'on voudra; car la relation $\frac{1}{A'} - h > 0$, où A′ est négatif, montre que h est négatif. Donc $\frac{1}{\mathcal{B}'} - h$ sera > 0, quelque grand que soit $\mathcal{B}'$.

Il résulte de là que, dans l'étude du signe de $h_1 - h$, on pourra se borner au cas où les deux corps C et C′ sont limités par des surfaces

du second degré. On pourra, en outre, se donner arbitrairement la courbure minimum de C et la courbure maximum de C′, pourvu qu'elles soient respectivement négative et positive, et suffisamment grandes en valeur absolue. Il nous sera donc permis de supposer qu'elles sont respectivement égales à $-\frac{1}{\varepsilon}$ et à $\frac{1}{\varepsilon}$, ε étant une quantité très-petite.

15. Dans cette hypothèse simple, il deviendra facile d'effectuer le calcul de $h_1 - h$ jusqu'aux termes du quatrième ordre.

Soient, en effet,

$$z = \frac{Ax^2 + By^2}{2}, \quad z' = \frac{A'x'^2 + B'y'^2}{2} \tag{29}$$

les équations des deux surfaces S et S′, et soient

$$\left\{\begin{array}{llllll} p = Ax, & q = By, & r = A, & s = 0, & t = B, \\ p' = A'x', & q' = B'y', & r' = A', & s' = 0, & t' = B' \end{array}\right. \tag{30}$$

les dérivées partielles du premier et du second ordre des ordonnées z et z' de ces deux surfaces.

La quantité $h_1 - h$ sera donnée par la formule (10), dans laquelle il faudra calculer les cosinus directeurs $a, b, c, \ldots, a_2, b_2, c_2$.

16. Commençons par le calcul de a, b, c. Ces cosinus directeurs seront donnés par les formules connues (Bertrand, *Calcul différentiel*, n° 633)

$$c = pa + qb, \tag{31}$$

$$\left\{\begin{array}{l} [pqt - (1 + q^2)s]b^2 + [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r]ab \\ \qquad\qquad + [(1 + p^2)s - pqr]a^2 = 0, \end{array}\right. \tag{32}$$

$$a^2 + b^2 + (pa + qb)^2 = 1. \tag{33}$$

On a d'ailleurs ici $s = 0$, p, q, b infiniment petits, et $a = 1 - \tau$, τ étant infiniment petit du second ordre. Substituant ces valeurs de s et de a

dans l'équation (32), elle deviendra, au troisième ordre près,

$$(t-r)b+(p^2t-q^2r)b-pqr=0. \tag{34}$$

La quantité $t-r$ étant finie, on voit, par cette équation, que b est du second ordre; $(p^2t-q^2r)b$ sera du quatrième ordre : on aura donc, au quatrième ordre près,

$$b=\frac{pqr}{t-r}. \tag{35}$$

L'équation (33) donnera ensuite, en posant $s=0$, $a=1-\tau$, et négligeant le quatrième ordre,

$$-2\tau+p^2=0, \quad \text{d'où} \quad \tau=\frac{p^2}{2},$$

et par suite, au quatrième ordre près,

$$a=1-\frac{p^2}{2}. \tag{36}$$

L'équation (31) donnera ensuite

$$c=p-\frac{p^3}{2}+\frac{pq^2r}{t-r}, \tag{37}$$

valeur exacte jusqu'au quatrième ordre inclusivement.

On trouvera de la même manière

$$\left\{\begin{aligned} a_1&=\frac{pqt}{r-t}, & b_1&=1-\frac{q^2}{2}, & c_1&=q-\frac{q^3}{2}+\frac{qp^2t}{r-t},\\ a'&=1-\frac{p'^2}{2}, & b'&=\frac{p'q'r'}{t'-r'}, & c'&=p'-\frac{p'^3}{2}+\frac{p'q'^2r'}{t'-r'},\\ a'_1&=\frac{p'q't'}{r'-t'}, & b'_1&=1-\frac{q'^2}{2}, & c'_1&=q'-\frac{q'^3}{2}+\frac{q'p'^2t'}{r'-t'}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

17. Il ne reste plus qu'à calculer $a_2, b_2, c_2, a'_2, b'_2, c'_2$. Or on a exactement

$$a_2=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad b_2=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad c_2=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

et, en s'arrêtant aux termes du quatrième ordre,

$$(39)\quad \begin{cases} a_2 = -p\left(1 - \dfrac{p^2+q^2}{2}\right), \\ b_2 = -q\left(1 - \dfrac{p^2+q^2}{2}\right), \\ c_2 = 1 - \dfrac{p^2+q^2}{2} + \dfrac{3}{8}(p^2+q^2)^2. \end{cases}$$

On aura de même

$$(40)\quad \begin{cases} a'_2 = -p'\left(1 - \dfrac{p'^2+q'^2}{2}\right), \\ b'_2 = -q'\left(1 - \dfrac{p'^2+q'^2}{2}\right), \\ c'_2 = 1 - \dfrac{p'^2+q'^2}{2} + \dfrac{3}{8}(p'^2+q'^2)^2. \end{cases}$$

Substituant les valeurs ci-dessus des cosinus directeurs dans l'équation (10) et négligeant les termes d'ordre supérieur au quatrième, il viendra

$$(41)\quad h_1 - h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A'} - h\right)\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B'} - h\right)\beta^2 + \frac{1}{2M}n^2 + \frac{D}{2M}y^2 + R,$$

en posant, pour abréger,

$$(42)\quad -\alpha = A'x' - Ax\cos\gamma + By\sin\gamma = p' - p\cos\gamma + q\sin\gamma,$$

$$(43)\quad \beta = B'y' - Ax\sin\gamma - By\cos\gamma = q' - p\sin\gamma - q\cos\gamma,$$

$$(44)\quad n = Mx + Ny,$$

$$(45)\quad \begin{cases} R = (p\cos\gamma - q\sin\gamma)\left[\dfrac{p'^2 t'}{2} - \dfrac{p'q'r'y'}{t'-r'} + h\left(-\dfrac{p'^2}{2} + \dfrac{p'q'^2r'}{t'-r'}\right) - p'z'\right] \\ \quad + (p\sin\gamma + q\cos\gamma)\left[-\dfrac{p'q't'x'}{r'-t'} + \dfrac{q'^2y'}{2} + h\left(-\dfrac{q'^2}{2} + \dfrac{q'p'^2t'}{r'-t'}\right) - q'z'\right] \\ \quad - \dfrac{p'^2+q'^2}{2}(p'x' + q'y' - z') + \dfrac{3}{8}(p'^2+q'^2)^2 h \\ \quad + \left[\left(-\dfrac{p^2}{2} + \dfrac{pq^2r}{t-r}\right)\cos\gamma - \left(-\dfrac{q^2}{2} + \dfrac{p^2qt}{r-t}\right)\sin\gamma\right](-x' + p'h) \\ \quad + \left[\left(-\dfrac{p^2}{2} + \dfrac{pq^2r}{t-r}\right)\sin\gamma + \left(-\dfrac{q^2}{2} + \dfrac{p^2qt}{r-t}\right)\cos\gamma\right](-y' + q'h) \\ \quad - \dfrac{p^2+q^2}{2}\left(p'x' + q'y' - \dfrac{p'^2+q'^2}{2}h - z'\right) + \dfrac{3}{8}(p^2+q^2)^2 h. \end{cases}$$

18. Nous devons chercher le signe que prend la quantité $h_1 - h$ lorsque α, β, n sont des quantités infiniment petites d'un ordre supérieur au premier et lorsque D est également infiniment petit. Ces hypothèses simplifient beaucoup le calcul de R. En effet, R étant du quatrième ordre, on n'y négligera que des termes d'ordre supérieur à celui-là, en y supposant les équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad n = 0, \quad D = 0$$

rigoureusement satisfaites; mais on déduit de ces équations

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} p\cos\gamma - q\sin\gamma = p', \quad p\sin\gamma + q\cos\gamma = q', \\ p'\cos\gamma + q'\sin\gamma = p, \quad -p'\sin\gamma + q'\cos\gamma = q, \\ \qquad\qquad p^2 + q^2 = p'^2 + q'^2. \end{array} \right.$$

En vertu de ces équations, les termes en h disparaîtront de l'expression de R. En effet, le multiplicateur de h peut se mettre sous la forme

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} p'\left(-\frac{p'^3}{2} + \frac{p'q'^2r'}{t'-r'}\right) + q'\left(-\frac{q'^3}{2} + \frac{p'^2q't'}{r'-t'}\right) + \frac{3}{8}(p'^2+q'^2)^2 \\ \quad + \left(-\frac{p^3}{2} + \frac{pq^2r}{t-r}\right)p + \left(-\frac{q^3}{2} + \frac{p^2qt}{r-t}\right)q \\ \quad + \frac{1}{4}(p^2+q^2)(p'^2+q'^2) + \frac{3}{8}(p^2+q^2)^2 \\ = -\frac{p'^4}{2} - \frac{q'^4}{2} - p'^2q'^2 + \frac{3}{8}(p'^2+q'^2)^2 \\ \quad - \frac{p^4}{2} - \frac{q^4}{2} - p^2q^2 + \frac{1}{4}(p^2+q^2)(p'^2+q'^2) + \frac{3}{8}(p^2+q^2)^2 \\ = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)(p'^2+q'^2)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)(p^2+q^2)^2 \\ \quad + \frac{1}{4}(p^2+q^2)(p'^2+q'^2) \\ = (p^2+q^2)^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Les autres termes de l'expression de R pourraient également se réduire d'une façon très-notable; mais, pour simplifier le calcul, nous

allons introduire la supposition

$$A = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad B = \frac{1}{\varepsilon},$$

dont nous avons parlé plus haut. La quantité ε étant d'une petitesse arbitraire, le signe de R sera déterminé par ceux de ses termes qui contiennent ε à la moindre puissance.

19. Calculons d'abord $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$. On a, pour déterminer $\sin\gamma$, l'équation

$$D = (A' - A)(B' - B) - (B' - A')(B - A)\sin^2\gamma = 0,$$

d'où

$$\sin^2\gamma = \frac{\left(A' + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon} - B\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon} - A'\right)\left(B + \frac{1}{\varepsilon}\right)} = \frac{(1 + \varepsilon A')(1 - \varepsilon B)}{(1 - \varepsilon A')(1 + \varepsilon B)} = 1 - 2\varepsilon(B - A'),$$

en négligeant ε^2.

On aura, par suite,

$$\cos\gamma = \sqrt{2(B - A')}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{48}$$

et, en négligeant ε,

$$\sin\gamma = 1. \tag{49}$$

20. On a ensuite $q = By$. D'autre part, on déterminera la valeur approchée de p par l'équation

$$n = Mx + Ny = \frac{M}{A}p + \frac{N}{B}q = 0. \tag{50}$$

On a, en effet,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{M}{A} &= \frac{1}{A'}\left[A' - A + \frac{A}{B'}(B' - A')\sin^2\gamma\right] \\ &= \frac{1}{A'}\left\{A' + \frac{1}{\varepsilon} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - A'\right)\left[1 - 2\varepsilon(B - A')\right]\right\} = \frac{2B}{A'}, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

en négligeant les termes en ε.

D'autre part,

$$\frac{N}{B} = \left(\frac{A}{A'} - \frac{A}{B'}\right)\sin\gamma\cos\gamma = \left(\frac{-1}{\varepsilon A'} + 1\right)\sin\gamma\cos\gamma,$$

ou sensiblement

$$(52) \qquad \frac{N}{B} = -\frac{\cos\gamma}{\varepsilon A'} = -\frac{\sqrt{2(B-A')}}{A'}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

On aura, par suite,

$$(53) \qquad p = \frac{\sqrt{2(B-A')}}{2B}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}q = \frac{\sqrt{2(B-A')}}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}y.$$

On aura ensuite les valeurs approchées suivantes :

$$(54) \qquad \left\{\begin{aligned}
p' &= p\cos\gamma - q\sin\gamma = \frac{2(B-A')}{2B}q - q = -A'y,\\
q' &= p\sin\gamma + q\cos\gamma = \frac{\sqrt{2(B-A')}}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}y,\\
x &= \frac{p}{A} = -\varepsilon p = -\frac{\sqrt{2(B-A')}}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}y,\\
z &= \frac{Ax^2 + By^2}{2} = \frac{B+A'}{4}y^2,\\
x' &= \frac{p'}{A'} = -y,\\
y' &= \frac{q'}{B'} = \varepsilon q' = \frac{\sqrt{2(B-A')}}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}y,\\
z' &= \frac{A'x'^2 + B'y'^2}{2} = \frac{B+A'}{4}y^2
\end{aligned}\right.$$

et enfin

$$r = A = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad t = B, \quad r' = A', \quad t' = B' = \frac{1}{\varepsilon}.$$

21. Substituant ces valeurs dans l'expression (45), négligeant les termes en h, qui s'annulent comme on l'a déjà vu, négligeant également les termes qui n'ont pas ε en dénominateur, il viendra, toutes réductions faites,

$$(55) \qquad R = \frac{1}{4}\frac{y^4}{\varepsilon}(B-A')^2.$$

R est donc nécessairement positif. Il est d'ailleurs évident qu'il en est de même des autres termes de l'expression (41), à l'exception du terme $\frac{D}{2M} y^2$.

22. Cherchons à déterminer la valeur minimum que puisse prendre ce terme. Ce minimum correspondra évidemment à la valeur limite λ_1 de l'angle γ, définie, comme on l'a vu plus haut, par l'équation (25). Comme λ_1 diffère infiniment peu de λ, la valeur correspondante de M sera sensiblement définie par l'équation trouvée plus haut,

$$\frac{M}{A} = \frac{2B}{A'};$$

d'où l'on déduit, en remplaçant A par $-\frac{1}{\varepsilon}$,

$$M = -\frac{2B}{A'\varepsilon}. \tag{56}$$

Il reste à déterminer la valeur correspondante de D, laquelle est égale à

$$(A' - A)(B' - B) - (B' - A')(B - A)\frac{(A'_1 - A_1)(B'_1 - B_1)}{(B'_1 - A'_1)(B_1 - A_1)}.$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$D = \frac{(A'-A)(B'-B)(B'_1-A'_1)(B_1-A_1)-(B'-A')(B-A)(A'_1-A_1)(B'_1-B_1)}{(B'_1-A'_1)(B_1-A_1)}. \tag{57}$$

Le dénominateur de cette expression est sensiblement égal à $(B' - A')(B - A)$, quantité qui se réduit elle-même sensiblement à $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

23. Il reste à évaluer le numérateur. Pour cela, nous devons calculer les valeurs approchées de A_1, B_1, A'_1, B'_1, et pousser le calcul jusqu'aux termes du second ordre en x, y, x', y'.

24. Or A_1 et B_1 sont les racines de l'équation suivante (BERTRAND, *Calcul différentiel*, n° **654**) :

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} rt - s^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)\,t + (1+q^2)\,r - 2pqs]\,\rho \\ + (1+p^2+q^2)^2\,\rho^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs s est nul, et p et q infiniment petits ; d'autre part, A_1 diffère infiniment peu de $A = r$.

Posons donc $\rho = r + \tau$; l'équation deviendra, en y supprimant les termes d'ordre supérieur au second et ceux qui se détruisent mutuellement,

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{p^2+q^2}{2}(t+r)\,r - (p^2t + q^2r)\,r - (t+r)\,\tau \\ + 2(p^2+q^2)\,r^2 + 2r\tau + \tau^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation montre que τ est du second ordre et a pour valeur approchée

$$(60)\quad \frac{\frac{p^2+q^2}{2}(t+r)\,r + (p^2t+q^2r)\,r - 2(p^2+q^2)\,r^2}{r-t} = -\frac{r}{2}(3p^2+q^2).$$

On aura donc, r étant égal à A,

$$(61)\qquad A_1 = A - \frac{A}{2}(3p^2+q^2);$$

on aura de même

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} B_1 &= B - \frac{B}{2}(3q^2+p^2), \\ A'_1 &= A' - \frac{A'}{2}(3p'^2+q'^2), \\ B'_1 &= B' - \frac{B'}{2}(3q'^2+p'^2). \end{aligned}\right.$$

Substituant ces valeurs dans le numérateur $\mathfrak{N}$ de D, et ne conservant

que les termes du second ordre, il viendra

$$
(63)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{T} = {} & (A' - A)(B' - B)(B' - A')\left[\frac{A}{2}(3p^2 + q^2) - \frac{B}{2}(3q^2 + p^2)\right] \\
& + (A' - A)(B' - B)(B - A)\left[\frac{A'}{2}(3p'^2 + q'^2) - \frac{B'}{2}(3q'^2 + p'^2)\right] \\
& - (B' - A')(B - A)(A' - A)\left[\frac{B}{2}(3q^2 + p^2) - \frac{B'}{2}(3q'^2 + p'^2)\right] \\
& - (B' - A')(B - A)(B' - B)\left[\frac{A}{2}(3p^2 + q^2) - \frac{A'}{2}(3p'^2 + q'^2)\right] \\
= {} & -\frac{A}{2}(3p^2 + q^2)(B' - B)(B' - A')(B - A') \\
& + \frac{A'}{2}(3p'^2 + q'^2)(B' - B)(B - A)(B' - A) \\
& - \frac{B}{2}(3q^2 + p^2)(B' - A')(A' - A)(B' - A) \\
& + \frac{B'}{2}(3q'^2 + p'^2)(B - A)(A' - A)(B - A').
\end{aligned}
\right.
$$

Remplaçons dans cette expression A, B′, p, q, p', q' par leurs valeurs en ε; il viendra, en négligeant tous les termes qui n'ont pas ε^4 au dénominateur,

$$
(64)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= \frac{\nu^2}{\varepsilon^4}\left[\frac{3}{4}(B - A')^2 + \frac{3}{2}A'(B - A') - B\frac{B - A'}{2} + \frac{3}{4}(B - A')^2\right] \\
&= \frac{\nu^2}{\varepsilon^4}B(B - A').
\end{aligned}
\right.
$$

La valeur minimum de $\frac{D}{2M}\nu^2$ sera donc sensiblement égale à

$$
(65)\quad \frac{\frac{\nu^4}{\varepsilon^4}B(B - A')}{-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{4B}{A'\varepsilon}} = -\frac{A'(B - A')\nu^4}{4\varepsilon},
$$

quantité positive, puisque A′ est négatif et B positif.

Donc tous les termes de $h_1 - h$ sont positifs, ce qu'il fallait démontrer.

II.

25. Nous avons établi, dans la Section précédente, que les conditions (**25**) suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre. Nous allons prouver, d'autre part, qu'elles sont nécessaires, en établissant les équations différentielles des oscillations infiniment petites que le solide C′ peut exécuter autour de sa position d'équilibre.

Soient X, Y, Z les coordonnées initiales d'un point quelconque du solide; ses coordonnées X_1, Y_1, Z_1, à un instant quelconque du mouvement, seront données par les formules (7), (8), (9).

Remplaçons dans ces formules les cosinus directeurs par leurs valeurs approchées trouvées plus haut (nos **16** et **17**), il viendra, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned}
X_1 &= x + \xi - p\zeta = x + \xi'\cos\gamma + \eta'\sin\gamma - p\zeta' \\
&= x + \cos\gamma(X - x' + p'Z) + \sin\gamma(Y - y' + q'Z) - pZ \\
&= x - x'\cos\gamma - y'\sin\gamma + X\cos\gamma + Y\sin\gamma \\
&\quad + Z(p'\cos\gamma + q'\sin\gamma - p), \\
Y_1 &= y + \eta - q\zeta = y - \xi'\sin\gamma + \eta'\cos\gamma - q\zeta' \\
&= y - \sin\gamma(X - x' + p'Z) + \cos\gamma(Y - y' + q'Z) - qZ \\
&= y + x'\sin\gamma - y'\cos\gamma - X\sin\gamma + Y\cos\gamma \\
&\quad + Z(-p'\sin\gamma + q'\cos\gamma - q), \\
Z_1 &= p\xi + q\eta + \zeta = p(\xi'\cos\gamma + \eta'\sin\gamma) \\
&\quad + q(-\xi'\sin\gamma + \eta'\cos\gamma) + \zeta' \\
&= p(X\cos\gamma + Y\sin\gamma) + q(-X\sin\gamma + Y\cos\gamma) - p'X - q'Y + Z \\
&= (p\cos\gamma - q\sin\gamma - p')X + (p\sin\gamma + q\cos\gamma - q')Y - Z.
\end{aligned}\right.$$

26. Ces expressions se simplifieront beaucoup en prenant pour variables indépendantes y, γ, et les quantités α, β, n définies par les équations (42), (43) et (44).

En effet, substituons d'abord, dans les formules (66), les valeurs de x', y', p', q', tirées des équations (42) et (43), et remplaçons, en

outre, p et q par leurs valeurs $\frac{x}{A}$, $\frac{y}{B}$, il viendra

$$X_1 = \alpha\cos\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) + \beta\sin\gamma\left(Z - \frac{1}{B'}\right) + x\left(1 - \frac{A\cos^2\gamma}{A'} - \frac{A\sin^2\gamma}{B'}\right)$$
$$+ y\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{B}{A'} - \frac{B}{B'}\right) + X\cos\gamma + Y\sin\gamma,$$

ou, comme on a

$$1 - \frac{A\cos^2\gamma}{A'} - \frac{A\sin^2\gamma}{B'} = \frac{M}{A}, \quad \sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{B}{A} - \frac{B}{B'}\right) = \frac{N}{A},$$

$$(67)\quad X_1 = \alpha\cos\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \beta\sin\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) + \frac{n}{A} + X\cos\gamma + Y\sin\gamma.$$

On aura de même

$$Y_1 = -\alpha\sin\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \beta\cos\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) + x\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{A}{A'} - \frac{A}{B'}\right)$$
$$+ y\left(1 - \frac{B}{A'}\sin^2\gamma - \frac{B}{B'}\cos^2\gamma\right) - X\sin\gamma + Y\cos\gamma$$

ou, en éliminant x par l'équation (44) et faisant les réductions

$$(68)\quad \begin{cases} Y_1 = -\alpha\sin\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \beta\cos\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) \\ \qquad + \frac{Nn}{BM} + \frac{D}{BM}y - X\sin\gamma + Y\cos\gamma, \end{cases}$$

D étant défini par l'équation (22).

On aura enfin

$$(69)\qquad Z_1 = Z + \alpha X - \beta Y.$$

27. Soit d'ailleurs m la masse du point XYZ. La force vive totale Φ que possédera le solide C', à l'instant considéré t, sera égale à

$$(70)\qquad \Phi = \sum m\,\frac{dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2}{dt^2},$$

la sommation s'étendant à tous les points du corps.

28. Prenons les dérivées des formules (67), (68) et (69), pour les substituer dans l'équation de Φ; il viendra

$$\begin{aligned}\Phi = \sum \Big\{ m \Big[& \frac{d\alpha}{dt}\cos\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) \\ & + \frac{1}{A}\frac{dn}{dt} - (+X\sin\gamma - Y\cos\gamma)\frac{d\gamma}{dt}\Big]^2 \\ + m\Big[& -\frac{d\alpha}{dt}\sin\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) \\ & + \frac{N}{BM}\frac{dn}{dt} + \frac{D}{BM}\frac{dy}{dt} - (X\cos\gamma + Y\sin\gamma)\frac{d\gamma}{dt}\Big]^2 \\ & + m\left(\frac{d\alpha}{dt}X - \frac{d\beta}{dt}Y\right)^2 + mR\Big\},\end{aligned}$$

R désignant un ensemble de termes du second degré au moins en α, β, n, y et contenant en outre des facteurs de la forme $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$.

L'amplitude des oscillations restant, par hypothèse, infiniment petite, α, β, n, y seront infiniment petits; le travail développé sera un infiniment petit du second ordre, ainsi que la force vive initiale; donc Φ sera un infiniment petit du second ordre.

Or R est du second ordre au moins; et, pour que Φ soit du second ordre, il est nécessaire que chacune des trois sommes de carrés qui figurent dans l'expression de Φ soit également infiniment petite du second ordre.

Or, pour que l'expression

$$\sum m\left(\frac{d\alpha}{dt}X - \frac{d\beta}{dt}Y\right)^2$$

soit du second ordre, il est évidemment nécessaire, ou que la masse du corps mobile soit sensiblement concentrée sur la droite unique, définie par l'équation

$$\frac{d\alpha}{dt}X - \frac{d\beta}{dt}Y = 0,$$

cas singulier que nous exclurons de notre examen, ou bien que $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d\beta}{dt}$ soient infiniment petits du premier ordre au moins.

On verra de même, en considérant successivement les autres sommes qui figurent dans Φ, que $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{D}{BM}\frac{dy}{dt}$ doivent être infiniment petits, du premier ordre au moins.

Nous supposerons d'abord que, à l'instant t que l'on considère, D ait une valeur finie; $\frac{dy}{dt}$ sera infiniment petit du premier ordre.

29. Cela posé, soient GX′, GY′, GZ′ trois axes parallèles à OX, OY, OZ et passant par le centre de gravité G. Les coordonnées du point XYZ, par rapport à ces nouveaux axes, seront $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z - h$.

On aura, d'après les propriétés connues de centre de gravité,

$$(71)\qquad \Sigma m X' = 0, \quad \Sigma m Y' = 0, \quad \Sigma m Z' = \Sigma m h = \mathfrak{M} h,$$

$\mathfrak{M}$ désignant la masse totale du corps mobile.

Nous poserons en outre, pour abréger,

$$(72)\quad \left\{\begin{array}{c} \Sigma m (Y'^2 + Z'^2) = \mathfrak{A}, \quad \Sigma m (Z'^2 + X'^2) = \mathfrak{A}', \quad \Sigma m (X'^2 + Y') = \mathfrak{A}'', \\ \Sigma m Y'Z' = \mathfrak{B}, \quad \Sigma m Z'X' = \mathfrak{B}', \quad \Sigma m X'Y' = \mathfrak{B}''. \end{array}\right.$$

30. Développons maintenant l'expression de Φ, après avoir remplacé X, Y, Z par X′, Y′, Z′ + h; il viendra, en tenant compte des relations (71) et (72) ainsi que des valeurs de M et de N (formules 20 et 21),

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi = {} & \left[\mathfrak{M}\left(\frac{1}{A'} - h\right)^2 + \mathfrak{A}'\right]\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \left[\mathfrak{M}\left(\frac{1}{B'} - h\right)^2 + \mathfrak{A}\right]\frac{d\beta^2}{dt^2} + \mathfrak{A}''\frac{d\gamma^2}{dt^2} \\ & + \mathfrak{M}\left(\frac{1}{A^2} + \frac{N^2}{B^2M^2}\right)\frac{dn^2}{dt^2} + \mathfrak{M}\frac{D^2}{B^2M^2}\frac{dy^2}{dt^2} - 2\mathfrak{B}''\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} - 2\mathfrak{B}\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\gamma}{dt} \\ & - 2\mathfrak{B}'\frac{d\beta}{dt}\frac{d\gamma}{dt} + 2\frac{\mathfrak{M}\cos\gamma}{M}\frac{A' - A}{A'}\left(\frac{1}{A'} - h\right)\frac{d\alpha}{dt}\frac{dn}{dt} \\ & - 2\frac{\mathfrak{M}\sin\gamma}{M}\frac{B' - A}{B'}\left(\frac{1}{B'} - h\right)\frac{d\beta}{dt}\frac{dn}{dt} - 2\frac{\mathfrak{M}\sin\gamma}{BM}D\left(\frac{1}{A'} - h\right)\frac{d\alpha}{dt}\frac{dy}{dt} \\ & - 2\frac{\mathfrak{M}\cos\gamma}{BM}D\left(\frac{1}{B'} - h\right)\frac{d\beta}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{2\mathfrak{M}ND}{B^2M^2}\frac{dn}{dt}\frac{dy}{dt} + \rho, \end{aligned}\right.$$

ρ étant une expression du troisième ordre par rapport aux infiniment petits α, β, n, γ, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$.

On a d'autre part (formule 41), pour l'expression du travail,

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} T &= -\mathfrak{M}(h_1 - h) \\ &= -\mathfrak{M}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A'} - h\right)\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B'} - h\right)\beta^2 + \frac{1}{2M}n^2 + \frac{D}{2M}\gamma^2 + R\right],\end{aligned}\right.$$

R étant infiniment petit d'un ordre supérieur au second.

51. Cela posé, le mouvement sera déterminé par les formules de Lagrange,

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\frac{d\alpha}{dt}} - \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \frac{\partial T}{\partial\alpha}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\frac{d\gamma}{dt}} - \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} = \frac{\partial T}{\partial\gamma}.\end{aligned}\right.$$

Effectuant les calculs, en négligeant les infiniment petits du second ordre, il viendra

$$(76)\quad a_1\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathfrak{B}''\frac{d^2\beta}{dt^2} + c_1\frac{d^2n}{dt^2} + d_1\frac{d^2\gamma}{dt^2} - \mathfrak{B}\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{1}{A'} - h\right)\alpha,$$

$$(77)\quad -\mathfrak{B}''\frac{d^2\alpha}{dt^2} + a_2\frac{d^2\beta}{dt^2} + b_2\frac{d^2n}{dt^2} + c_2\frac{d^2\gamma}{dt^2} - \mathfrak{B}'\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{1}{B'} - h\right)\beta,$$

$$(78)\quad c_1\frac{d^2\alpha}{dt^2} + b_2\frac{d^2\beta}{dt^2} + a_3\frac{d^2n}{dt^2} + b_3\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{2M}n,$$

$$(79)\quad d_1\frac{d^2\alpha}{dt^2} + c_2\frac{d^2\beta}{dt^2} + b_3\frac{d^2n}{dt^2} + a_4\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{M}D}{2M}\gamma,$$

$$(80)\quad -\mathfrak{B}\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathfrak{B}'\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathfrak{A}''\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

en posant, pour abréger,

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} &a_1 = \mathfrak{M}\left(\frac{1}{A'} - h\right)^2 + \mathfrak{a}', \quad c_1 = \frac{\mathfrak{M}\cos\gamma}{M}\,\frac{A' - A}{A}\left(\frac{1}{A'} - h\right),\\ &\qquad\qquad d_1 = -\frac{\mathfrak{M}\sin\gamma\, D}{BM}\left(\frac{1}{A'} - h\right);\\ &a_2 = \mathfrak{M}\left(\frac{1}{B'} - h\right)^2 + \mathfrak{a}, \quad b_2 = -\frac{\mathfrak{M}\sin\gamma}{M}\,\frac{B' - A}{B'}\left(\frac{1}{B'} - h\right),\\ &\qquad\qquad c_2 = -\frac{\mathfrak{M}\cos\gamma\, D}{BM}\left(\frac{1}{B'} - h\right):\\ &a_3 = \mathfrak{M}\left(\frac{1}{A^2} + \frac{N^2}{B^2M^2}\right), \quad b_3 = \frac{\mathfrak{M}\,ND}{B^2M^2}, \quad a_4 = \frac{\mathfrak{M}\,D^2}{B^2M^2}. \end{aligned}\right.$$

32. L'équation (80) peut s'intégrer immédiatement. Elle donne successivement

$$-\mathfrak{b}\frac{d\alpha}{dt} - \mathfrak{b}'\frac{d\beta}{dt} + \mathfrak{a}''\frac{d\gamma}{dt} = \varepsilon,$$

ε étant une constante infiniment petite du premier ordre; puis

$$-\mathfrak{b}\alpha - \mathfrak{b}'\beta + \mathfrak{a}''\gamma = \varepsilon t + k,$$

k étant une autre constante.

Comme on suppose que α et β restent toujours infiniment petits, on aura sensiblement

$$\gamma = \frac{\varepsilon t + k}{\mathfrak{a}''},$$

et l'on pourra substituer cette valeur dans les sinus et cosinus qui figurent dans les coefficients $a_1, c_1, \ldots, a_4$. Cela fait, les équations (76) à (80) formeront un système d'équations linéaires dont les coefficients sont, les uns constants, les autres des fonctions périodiques du temps, à variations lentes.

On ne sait pas, en général, intégrer un semblable système; mais nous remarquerons que, tant que t ne sera pas devenu infiniment grand du premier ordre, εt sera négligeable; par suite, les coefficients $a_1, \ldots, a_4$ pourront être considérés comme constants. L'intégration pourra se faire, et les formules qu'elle donne resteront applicables à toute cette période du mouvement.

33. Cela posé, on va voir que, si $\frac{1}{A'} - h$, $\frac{1}{B'} - h$, M et D ne sont pas

positifs [autrement dit, si les conditions (23) ne sont pas satisfaites], les valeurs de α, β, n, γ, η fournies par les intégrales des équations à coefficients constants croîtront indéfiniment pendant la période où ces équations sont applicables, résultat évidemment contradictoire avec l'hypothèse que les oscillations restent infiniment petites.

Les coefficients des équations (76) à (80) étant supposés constants, l'intégration de ce système dépendra, comme on sait, de la résolution de l'équation caractéristique

$$(82)\quad \begin{vmatrix} a_1 s^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{1}{A'} - h\right) & -\mathfrak{B}'' s^2 & c_1 s^2 & d_1 s_2 & \mathfrak{B} s^2 \\ -\mathfrak{B}'' s^2 & a_2 s^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{1}{B'} - h\right) & b_2 s^2 & c_2 s^2 & -\mathfrak{B}' s^2 \\ c_1 s^2 & b_2 s^2 & a_3 s^2 + \frac{\mathfrak{M}}{2M} & b_3 s^2 & 0 \\ d_1 s^2 & c_2 s^2 & b^3 s^2 & a_4 s^2 + \frac{\mathfrak{M} D}{2M} & 0 \\ \mathfrak{B} s^2 & -\mathfrak{B}' s^2 & 0 & 0 & \mathcal{A}'' s^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient Δ ce déterminant, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 les déterminants plus simples obtenus en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, puis les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes, etc. Considérons la suite

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4,\ 1.$$

On sait que, si un terme de cette suite s'annule, les deux termes entre lesquels il est compris seront de signe contraire [*]. Si donc on fait varier s^2 de $+\infty$ à $-\infty$, la suite ne pourra gagner ni perdre de variations que lorsque s^2 passera par une valeur qui annule Δ.

Or Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 sont respectivement des polynômes des degrés 5, 4, 3, 2, 1 en s^2, et le coefficient du premier terme y est positif. En effet, le premier coefficient de Δ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & -\mathfrak{B}'' & c_1 & d_1 & \mathfrak{B} \\ -\mathfrak{B}'' & a_2 & b_2 & c_2 & -\mathfrak{B}' \\ c_1 & b_2 & a_3 & \mathfrak{C}_2 & 0 \\ d_1 & c_2 & \mathfrak{C}_3 & a_4 & 0 \\ \mathfrak{B} & -\mathfrak{B}' & 0 & 0 & \mathcal{A}'' \end{vmatrix},$$

[*] *Voir* LAURENT, *Traité de Mécanique*, p. 215 à 219.

qui n'est autre que le discriminant de la fonction positive Φ, quadratique par rapport aux variables $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\eta}{dt}$. Les coefficients analogues dans $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ s'en déduisent en supprimant une ligne et une colonne, deux lignes et deux colonnes, etc., et ne sont autres que les discriminants des fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, qui se déduisent de Φ en posant $\frac{d\eta}{dt} = 0$, puis $\frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0, \ldots$.

Si donc on fait $s^2 = +\infty$, la suite $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_4, 1$ ne présentera que des permanences. Si l'on pose $s^2 = -\infty$, on n'aura au contraire que des variations. On aura donc cinq variations gagnées; les cinq racines de l'équation en s^2 sont donc réelles.

Donnons maintenant à s une valeur positive très-petite. Les valeurs correspondantes de $\Delta, \Delta_1, \ldots, 1$ seront sensiblement

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta &= \lambda'' s^2 \frac{\partial\mathfrak{R}\,\mathrm{D}}{2\mathrm{M}} \frac{\partial\mathfrak{R}}{2\mathrm{M}} \frac{1}{2}\partial\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\mathrm{B}'} - h\right) \frac{1}{2}\partial\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\mathrm{A}'} - h\right)\\
\Delta_1 &= \frac{\partial\mathfrak{R}\,\mathrm{D}}{2\mathrm{M}} \frac{\partial\mathfrak{R}}{2\mathrm{M}} \frac{1}{2}\partial\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\mathrm{B}'} - h\right) \frac{1}{2}\partial\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\mathrm{A}'} - h\right)\\
\Delta_2 &= \frac{\partial\mathfrak{R}}{2\mathrm{M}} \frac{1}{2}\partial\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\mathrm{B}'} - h\right) \frac{1}{2}\partial\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\mathrm{A}'} - h\right)\\
\Delta_3 &= \frac{1}{2}\partial\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\mathrm{B}'} - h\right) \frac{1}{2}\partial\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\mathrm{A}'} - h\right)\\
\Delta_4 &= \frac{1}{2}\partial\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\mathrm{A}'} - h\right)\\
1 &= 1
\end{aligned}\right.$$

Si les quantités $\frac{1}{\mathrm{A}} - h$, $\frac{1}{\mathrm{B}} - h$, M, D ne sont pas toutes positives, cette suite présentera des variations, lesquelles indiqueront l'existence nécessaire de racines positives pour l'équation en s^2.

Soit s_1^2 la plus grande de ces racines positives. Les valeurs de $\alpha, \beta, n, y, \eta$, déduites de l'intégration des équations différentielles, contiendront, comme on sait, des termes de la forme $\mathrm{C}e^{s_1 t}$, où C est un multiplicateur constant, déterminé par les circonstances initiales du mouvement, et qui sera généralement un infiniment petit du premier ordre. Lorsque t croîtra, $e^{s_1 t}$ croîtra indéfiniment et beaucoup plus rapidement que lui, de telle sorte que $\mathrm{C}e^{s_1 t}$ deviendra très-grand, à une

époque où, εt étant encore négligeable, on pourra traiter les équations (76) à (80) comme si leurs coefficients étaient constants.

34. Nous avons supposé, en établissant les équations différentielles (76) à (80) à coefficients périodiques, que D n'était pas sensiblement égal à zéro. Nous pouvions évidemment faire cette supposition pour démontrer l'instabilité de l'équilibre, car nous étions maîtres de disposer des conditions initiales du mouvement. D'ailleurs, tant que εt était négligeable, γ et par suite D ne devaient pas varier sensiblement si l'équilibre avait été stable. Donc D serait resté fini, comme il l'était à l'origine.

35. Mais, lorsque les conditions (23) sont satisfaites, auquel cas l'équilibre est stable, on peut se demander si les petites oscillations seront régies pendant toute la durée du mouvement par les équations à coefficients périodiques (76) à (80) établies dans l'hypothèse où D est une quantité finie.

On doit évidemment répondre par l'affirmative si $A' > B$, auquel cas le solide mobile peut tourner d'un angle quelconque sur l'appui ; car on a vu que dans ce cas D est une quantité toujours positive et finie (10).

Mais il n'en est pas de même si $A' < B$, auquel cas D peut atteindre la valeur zéro, ou même la dépasser infiniment peu. On devra distinguer dans le mouvement trois périodes successives.

Première période : D fini et positif. Les équations (76) à (80) sont applicables; γ croîtra avec le temps (décroîtra si ε est négatif) d'une manière à peu près continue, mais avec une grande lenteur. Cependant, au bout d'un temps suffisamment considérable, γ se rapprochera de la valeur qui annule D, et la deuxième période commencera.

Deuxième période : D est infiniment petit, mais supérieur à sa valeur minimum. On ne sera plus en droit d'affirmer que $\frac{d\gamma}{dt}$ est infiniment petit. Il faudra donc compléter les équations différentielles du mouvement en y rétablissant les termes que cette hypothèse avait fait supprimer. Ces équations cesseront alors d'être linéaires.

Troisième période : Elle commencera lorsque l'angle γ aura atteint la limite extrême au delà de laquelle se produirait la pénétration mutuelle du solide mobile et de l'appui. A partir de ce moment, il se manifes-

tera une résistance à l'accroissement ultérieur de γ, et le mouvement qui se produira sera le même que si le corps C′ était assujetti à conserver d'une manière constante cette orientation extrême, définie par l'équation (25). Cette équation permettra d'exprimer à chaque instant γ en fonction de x, y, x', y', ou des nouvelles variables α, β, n, y que nous leur avons substituées. Si l'on remplace γ par cette valeur dans l'expression de la force vive et du travail, ces quantités seront exprimées en fonction des seules variables α, β, n, y, et l'on obtiendra par la formule de Lagrange quatre équations différentielles entre ces variables.

Il pourrait se faire, d'ailleurs, que chacune des trois périodes que nous venons d'indiquer se produisît plusieurs fois dans la durée du mouvement.

Nous n'essayerons pas de former les équations du mouvement pour la deuxième et la troisième période. Les calculs, sans présenter, à ce qu'il semble, de difficultés sérieuses, seraient fort compliqués, et les équations fussent-elles formées, on ne pourrait guère espérer de les intégrer.

36. Nous nous bornerons à signaler, en terminant, deux cas intéressants, où les variables peuvent être choisies de telle sorte que les équations du mouvement deviennent linéaires à coefficients constants.

Le procédé le plus simple pour établir ces équations paraît être le suivant.

Considérons le mobile dans une quelconque de ses positions. On pourra l'amener de sa position initiale à celle-là par un double mouvement : 1° de rotation autour du centre de gravité; 2° de translation de ce centre.

La rotation peut se décomposer en trois autres, autour des axes GX′, GY′, GZ′, parallèles à OX, OY, OZ et mobiles avec le centre de gravité; soient β', α', γ' les amplitudes de ces rotations.

La translation peut de même être décomposée en trois autres, parallèles aux X, aux Y et aux Z, et dont nous représenterons les amplitudes par ξ, η, ζ.

Les oscillations restant infiniment petites, ξ, ζ, η, β', α' seront infiniments petits; mais, le corps pouvant changer d'orientation d'une manière notable, γ' pourra être fini.

Le point dont les coordonnées sont primitivement X, Y, Z aura pour

coordonnées initiales, par rapport aux axes mobiles, $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z - h$.

Après les rotations infinitésimales β' et α', ces coordonnées seront devenues

$$X' - \alpha' Z', \quad Y' + \beta' Z', \quad Z' + \alpha' X' - \beta' Y'.$$

Après la troisième rotation γ', ces coordonnées seront

$$(84) \quad \begin{cases} X'_1 = (X' - \alpha' Z') \cos\gamma' + (Y + \beta' Z') \sin\gamma', \\ Y'_1 = -(X' - \alpha' Z') \sin\gamma' + (Y' + \beta' Z') \cos\gamma', \\ Z'_1 = Z' + \alpha' X' - \beta' Y'. \end{cases}$$

Après les translations ξ, η, ζ, les coordonnées du même point, par rapport à OX, OY, OZ, seront

$$\begin{aligned} X_1 = X'_1 + \xi &= (X - \alpha' Z) \cos\gamma' + (Y + \beta' Z) \sin\gamma' \\ &\quad + (\alpha' \cos\gamma' - \beta' \sin\gamma') h + \xi, \\ Y_1 = Y'_1 + \eta &= -(X - \alpha' Z) \sin\gamma' + (Y + \beta' Z) \cos\gamma' \\ &\quad - (\alpha' \sin\gamma' + \beta' \cos\gamma') h + \eta, \\ Z_1 = Z'_1 + h + \zeta &= Z + \alpha' X - \beta' Y + \zeta. \end{aligned}$$

37. La comparaison de ces formules avec les formules (66) et (67) montre que l'on a

$$(85) \quad \alpha' = p \cos\gamma - q \sin\gamma - p' = Ax \cos\gamma - By \sin\gamma - A'x' = \alpha,$$

$$(86) \quad \beta' = -p \sin\gamma - q \cos\gamma + q' = -Ax \sin\gamma - By \cos\gamma + B'y' = \beta,$$

$$(87) \quad \gamma' = \gamma,$$

$$(88) \quad \xi = x - x' \cos\gamma - y' \sin\gamma - (\alpha \cos\gamma - \beta \sin\gamma) h,$$

$$(89) \quad \eta = y + x' \sin\gamma - y' \cos\gamma + (\alpha \sin\gamma + \beta \cos\gamma) h,$$

$$(90) \quad \zeta = 0.$$

38. Cela posé, soient F_x, F_y, F_z la somme des composantes des forces qui agissent sur C'; μ_x, μ_y, μ_z leurs moments par rapport aux axes mobiles GX', GY', GZ'; le mouvement de translation sera déter-

miné par les trois équations

$$(91)\qquad \mathfrak{M}\frac{d^2\xi}{dt^2} = F_x,$$

$$(92)\qquad \mathfrak{M}\frac{d^2y}{dt^2} = F_y,$$

$$(93)\qquad \mathfrak{M}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = F_z.$$

Pour déterminer, d'autre part, le mouvement de rotation, on aura les équations des aires

$$(94)\qquad \sum m\left(Y'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2} - Z'_1\frac{d^2Y'_1}{dt^2}\right) = \mu_x,$$

$$(95)\qquad \sum m\left(Z'_1\frac{d^2X'_1}{dt^2} - X'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2}\right) = \mu_y,$$

$$(96)\qquad \sum m\left(X'_1\frac{d^2Y'_1}{dt^2} - Y'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2}\right) = \mu_z.$$

39. Nous allons calculer les deux membres de chacune de ces équations, en supposant D fini.

On a vu que dans ce cas $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sont infiniment petits. Il en sera de même de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$. En effet, x est déterminé par l'équation

$$n = Mx + Ny,$$

où M est une quantité finie et positive. En différentiant cette équation, on trouvera $\frac{dx}{dt}$ exprimé en fonction de quantités infiniment petites. On trouvera de même, en différentiant les équations (42) et (43), que $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dy'}{dt}$ sont infiniment petits.

Cela posé, les équations (88), (89) et (90), étant différentiées deux fois, donneront, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\xi}{dt} = \mathfrak{M}\left[\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\gamma - \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2\beta}{dt^2}\sin\gamma\right)h\right],$$

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mathfrak{M}\left[\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}\sin\gamma - \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\gamma + \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\sin\gamma + \frac{d^2\beta}{dt^2}\cos\gamma\right)h\right],$$

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$

On trouvera de même, par la différentiation des équations (84), en négligeant le second ordre et remplaçant α', β', γ' par α, β, γ,

$$\sum m\left(Y'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2} - Z'_1\frac{d^2Y'_1}{dt^2}\right) = \sin\gamma\left(-\mathfrak{A}'\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathfrak{B}''\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathfrak{B}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)$$
$$+\cos\gamma\left(\mathfrak{B}''\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathfrak{A}\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathfrak{B}'\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right),$$

$$\sum m\left(Z'_1\frac{d^2X'_1}{dt^2} - X'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2}\right) = \cos\gamma\left(-\mathfrak{A}'\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathfrak{B}''\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathfrak{B}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)$$
$$-\sin\gamma\left(\mathfrak{B}''\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathfrak{A}\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathfrak{B}'\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right),$$

$$\sum m\left(X'_1\frac{d^2Y'_1}{dt^2} - Y'_1\frac{d^2X'_1}{dt^2}\right) = +\mathfrak{B}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathfrak{B}'\frac{d^2\beta}{dt^2} - \mathfrak{A}''\frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

40. Passons au calcul de F_x, F_y, F_z, μ_x, μ_y, μ_z.

Le solide C' est soumis à deux forces, son poids $\mathfrak{M}g$ et la réaction $\mathfrak{T}$ de l'appui, laquelle passe au point dont les coordonnées sont x, y, z, et dont les cosinus directeurs sont sensiblement égaux à $-p = -Ax$, $-q = -By$, 1.

On aura, par suite,

$$F_x = \mathfrak{T}Ax, \quad F_y = -\mathfrak{T}By, \quad F_z = \mathfrak{T} - \mathfrak{M}g;$$

mais on a

$$F_z = \mathfrak{M}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{M}g$$

et, par suite,

$$F_x = -\mathfrak{M}gAx, \quad F_y = \mathfrak{M}gBy.$$

D'autre part, le moment du poids par rapport aux axes mobiles sera nul, et ceux de la réaction Mg seront, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned}
\mu_x &= Mg(y-\eta) - MgByh \\
&= Mg[-x'\sin\gamma + y'\cos\gamma - (\alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma + By)h] \\
&= Mg[(A'h-1)x'\sin\gamma - (B'h-1)y'\cos\gamma], \\
\mu_y &= MgAxh - Mg(x-\xi) \\
&= Mg[-x'\cos\gamma - y'\sin\gamma - (\alpha\cos\gamma - \beta\sin\gamma + Ax]h \\
&= Mg[(A'h-1)x'\cos\gamma + (B'h-1)y'\cos\gamma], \\
\mu_z &= 0.
\end{aligned}$$

41. Les équations (91) et (92) deviendront donc

$$(97)\quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\gamma - \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2\beta}{dt^2}\sin\gamma\right)h = -gAx,$$

$$(98)\quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}\sin\gamma - \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\gamma + \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\sin\gamma + \frac{d^2\beta}{dt^2}\cos\gamma\right)h = -gBy.$$

Substituons, d'autre part, dans les équations (94) et (95), les valeurs trouvées pour leurs deux membres, puis ajoutons-les, après les avoir multipliées respectivement par $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$; il viendra

$$(99)\quad -\mathfrak{A}'\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathfrak{B}''\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathfrak{B}\frac{d^2\gamma}{dt^2} = (A'h - 1)x'.$$

Ajoutons-les, d'autre part, après les avoir multipliées par $\cos\gamma$ et $-\sin\gamma$, il viendra

$$(100)\quad \mathfrak{B}''\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathfrak{A}\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathfrak{B}'\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -(B'h - 1)y';$$

enfin l'équation (96) devient

$$(101)\quad \mathfrak{B}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathfrak{B}'\frac{d^2\beta}{dt^2} - \mathfrak{A}''\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

Les équations (97) à (101), jointes aux deux équations (42) et (43), détermineront complétement les variables x, y, x', y', α, β, γ.

42. Cela posé, si l'appui est de révolution, on aura $A = B$, et l'élimination de x, y, à l'aide des équations (42) et (43), donnera un système de cinq équations linéaires à coefficients constants pour déterminer les inconnues restantes. En effet, on a déjà trois de ces équations, à savoir (99), (100) et (101).

D'autre part, multiplions les équations (97) et (98) respectivement par $\cos\gamma$ et $-\sin\gamma$ et ajoutons-les, il viendra

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2y}{dt^2}\sin\gamma - \frac{d^2x'}{dt^2} - h\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -gA(x\cos\gamma - y\sin\gamma);$$

mais on a, d'après (42),

$$x\cos\gamma - y\sin\gamma = \frac{A'x' + \alpha}{A};$$

d'où, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2y}{dt^2}\sin\gamma = \frac{A'}{A}\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{1}{A}\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

On obtient donc l'équation à coefficients constants

$$(102)\qquad \left(\frac{A'}{A} - 1\right)\frac{d^2x'}{dt^2} + \left(\frac{1}{A} - h\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g(A'x' + \alpha).$$

Enfin, multipliant les équations (97) et (98) par $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$ et ajoutant, il viendra de même, en tenant compte de (43),

$$(103)\qquad \left(\frac{B'}{A} - 1\right)\frac{d^2y'}{dt^2} - \left(\frac{1}{A} - h\right)\frac{d^2\beta}{dt^2} = -g(B'y' - \beta).$$

45. Le second cas remarquable est celui où l'on a les relations

$$(104)\qquad A' = B',\quad \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}''} - \mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{A}''} - \mathfrak{A},\quad \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}''} - \mathfrak{B}'' = 0.$$

Remplaçons x' et y' dans les équations (97) et (98) par leurs valeurs tirées de (42) et (43) et prenons en outre pour variables, à la place de α, β, les expressions

$$\alpha_1 = \alpha\cos\gamma - \beta\sin\gamma,$$
$$\beta_1 = \alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma.$$

L'équation (87) deviendra

$$(105)\qquad \left(1 - \frac{A}{A'}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{A'} - h\right)\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -gAx.$$

L'équation (98) donnera de même

$$(106)\qquad \left(1 - \frac{B}{A'}\right)\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{1}{A'} - h\right)\frac{d^2\beta_1}{dt^2} = -gBy.$$

Éliminons d'autre part $\frac{d^2y}{dt^2}$ des équations (99) et (100) à l'aide de l'équation (101) : il viendra, en tenant compte des relations (104) et posant, pour abréger, $\frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}' = \lambda$,

$$\lambda \frac{d^2\alpha}{dt^2} = (A'h - 1)x' = \frac{A'h - 1}{A}(Ax\cos\gamma - By\sin\gamma - \alpha),$$

$$\lambda \frac{d^2\beta}{dt^2} = -(A'h - 1)y' = \frac{A'h - 1}{A'}(-Ax\sin\gamma - By\cos\gamma - \beta).$$

Multipliant ces équations par $\cos\gamma$ et $-\sin\gamma$ et ajoutant, il viendra

$$\lambda \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = \frac{A'h - 1}{A'}(Ax - \alpha_1). \tag{107}$$

Multipliant d'autre part par $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$ et ajoutant, il viendra

$$\lambda \frac{d^2\beta_1}{dt^2} = \frac{A'h - 1}{A'}(-By - \beta_1). \tag{108}$$

On aura donc, pour déterminer x, y, α_1, β_1, les quatre équations (105) à (108), qui sont à coefficients constants.

44. Si le solide C′ est de révolution (par sa constitution intérieure comme par sa forme extérieure), on aura

$$A' = B', \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'', \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'' = 0,$$

et les équations (104) seront identiquement satisfaites. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Les oscillations infiniment petites seront régies par des équations à coefficients constants : 1° si l'appui est de révolution; 2° si le solide mobile est de révolution (à l'intérieur et à l'extérieur).

De la résistance au choc d'une chaîne à maillons plats;

PAR M. H. RESAL.

La seule règle admise dans la pratique pour calculer l'équarrissage du fer d'une chaîne à maillons plats, capable de supporter une charge déterminée, consiste à assimiler la chaîne à deux tringles de même longueur qu'elle même, dont le diamètre est celui du fer des maillons. J'ai démontré, en 1862, que cette règle est défectueuse, et que, dans l'application, elle doit conduire à des déceptions, trop souvent accusées par de sérieux accidents.

Je me propose, dans cette Note, de calculer l'effet d'un choc sur une chaîne; mais, auparavant, il est nécessaire que je reprenne sommairement la question que j'ai traitée, il y a douze ans, pour donner aux formules fondamentales une forme mieux appropriée à mes nouvelles recherches.

Considérons d'abord un maillon à l'état naturel et soient

O le centre de la fibre moyenne de l'une des parties circulaires qui terminent le maillon;

C le centre de figure du maillon;

A_0 le point de la fibre moyenne circulaire, situé sur la direction de OC;

B_0 une des naissances de la même fibre;

ρ_0 son rayon;

a le rayon de la section de la pièce;

$\Omega = \pi a^2$ l'aire de cette section;

$I = \frac{\pi a^4}{4}$ son moment d'inertie par rapport à un diamètre;

A un point quelconque de l'arc $A_0 B_0$;

θ l'angle AOA_0;

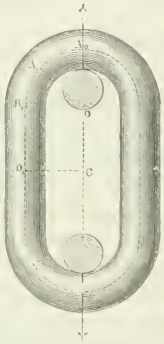
D_0 le milieu de la fibre moyenne rectiligne aboutissant au point B_0;

l la longueur $B_0 D_0$;

E le coefficient d'élasticité de la matière.

Prenons respectivement les directions de CO et CD_0 pour axes des x et des y.

Représentons par 2P l'intensité des efforts égaux et de sens contraires qui agissent dans la section de A_0 et dans son opposée.



Il est clair que, en raison de la symétrie par rapport au point D_0, il n'y a pas de glissement dans la section correspondant à ce point.

L'effort longitudinal suivant $B_0 D_0$ étant égal à P, on a pour la dilatation dans cette partie du maillon

$$(1) \qquad \delta_1 = \frac{P}{E\Omega}.$$

L'une des conditions d'équilibre de la portion AB_0 de la pièce donne, en appelant δ la dilatation en A,

$$P \sin\theta = E\Omega\delta,$$

d'où

$$(2) \qquad \delta = \delta_1 \sin\theta,$$

et la dilatation en A_0 est ainsi nulle.

Soient maintenant

$\mathfrak{M}$ le moment du couple élastique dans la section menée par le point A;
$d\omega$ un élément superficiel de cette section;
ζ sa distance à la droite dont la trace est A;
ρ le rayon de courbure de la fibre moyenne déformée au point A.

On sait que l'on a

$$\mathfrak{M} = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\int \frac{\zeta^2 d\omega}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}} = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\rho_0^2 \int\left(\frac{\zeta}{\rho_0} - 1 + \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}}\right) d\omega$$

$$= \mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\rho_0^2\left(-\pi a^2 + \int \frac{d\omega}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}}\right).$$

On peut prendre pour $d\omega$ l'élément limité par les circonférences ayant A pour centre et pour rayons χ, $\chi + d\chi$, et par deux rayons infiniment voisins faisant avec la droite projetée en A les angles ψ, $\psi + d\psi$. On a ainsi

$$d\omega = \chi\, d\chi\, d\psi, \quad \zeta = \chi \sin\psi$$

et

$$\int \frac{d\omega}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}} = \int_0^a \chi\, d\chi \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 + \frac{\chi}{\rho_0}\sin\psi}$$

$$= \int_0^a \chi\, d\chi\left(\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 + \frac{\chi}{\rho_0}\sin\psi} + \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 - \frac{\chi}{\rho_0}\sin\psi}\right).$$

En posant $z = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}$, on voit facilement que

$$\int_0^{\pi} \frac{d\psi}{1 + \frac{\chi}{\rho_0}\sin\psi} = 2\int_0^{\infty} \frac{dz}{1 + z^2 + 2z\chi} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\rho_0^2}}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\frac{\chi}{\rho_0}}{\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\rho_0^2}}}\right).$$

On a de même

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\psi}{1 - \frac{\chi}{\rho_0}\sin\psi} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\rho_0^2}}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\frac{\chi}{\rho_0}}{\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{\rho_0^2}}}\right),$$

par suite

$$\int \frac{d\omega}{1+\frac{\zeta}{\rho_0}} = 2\pi \int_0^a \frac{\chi\, d\chi}{\sqrt{1-\frac{\chi^2}{\rho_0^2}}} = 2\pi\rho_0^2\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho_0^2}}\right)$$

et enfin

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\pi\rho_0^2\left[-a^2+2\rho_0^2\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho_0^2}}\right)\right]\\ &= \mathrm{EI}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\frac{4\rho_0^2}{a^2}\left[-1+\frac{2\rho_0^2}{a^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho_0^2}}\right)\right].\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(1) \qquad \frac{a}{\rho_0} = \sin\gamma,$$

l'expression précédente prend la forme

$$(2) \qquad \mathfrak{M} = \frac{\mathrm{EI}}{\cos^4\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right).$$

En représentant par $\mathrm{A}\rho_0$ le moment du couple élastique développé dans la section passant par A_0, on a enfin

$$(3) \qquad \mathrm{EI}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right) = -(\mathrm{P}\sin\theta+\mathrm{A})\rho_0\cos^4\frac{\gamma}{2}.$$

Si α est l'angle que forme la normale en A avec l'axe des x, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{(1+\delta)\rho_0 d\theta} = \frac{d\alpha}{(1+\delta_1\sin\theta)\rho_0 d\theta},$$

et l'équation précédente donne, par suite, en continuant à négliger les termes du second ordre,

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1+\delta_1\sin\theta - \frac{(\mathrm{P}\sin\theta+\mathrm{A})}{\mathrm{EI}}\rho_0^2\cos^4\frac{\gamma}{2},$$

d'où, en remarquant que l'on a $\alpha = 0$ pour $\theta = 0$,

$$\alpha = \theta + 2\delta_1 \sin^2\frac{\theta}{2} - \left(\frac{2P\sin^2\frac{\theta}{2} + A\theta}{EI}\right)\rho_0^2\cos^4\frac{\gamma}{2}.$$

En appelant α_1 la valeur de cet angle pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \delta_1 - \left(\frac{P + A\frac{\pi}{2}}{EI}\right)\rho_0^2\cos^4\frac{\gamma}{2}.$$

On peut prendre

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tang}\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \delta_1 - \left(\frac{P + A\frac{\pi}{2}}{EI}\right)\rho_0^2\cos^4\frac{\gamma}{2}.$$

L'équation relative à la flexion des parties droites des maillons s'obtiendra en supposant $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\rho_0} = \infty$, $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ dans la formule (3), dont on devra changer, en outre, le signe du second membre, ce qui donne

$$\text{(5)} \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = (P + A)\rho_0\cos^4\frac{\gamma}{2},$$

d'où, en remarquant que $\frac{dy}{dx} = 0$ au point D_0 ou pour $x = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(P + A)}{EI}\rho_0 x\cos^4\frac{\gamma}{2}.$$

Or on a pour $x = l$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$\text{(6)} \qquad A = -P\varepsilon,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$\text{(7)} \qquad \left\{\begin{aligned} k &= \frac{l}{\rho_0}, \\ \varepsilon &= \frac{1 + k - \operatorname{tang}^2\frac{\gamma}{2}}{\frac{\pi}{2} + k}. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient ε est inférieur à l'unité et n'approche de cette limite que lorsque les maillons sont très-allongés ou que k est suffisamment grand.

Les équations (3) et (5) prennent alors la forme suivante :

$$\text{(3')} \qquad EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = -P(\sin\theta - \varepsilon)\rho_0 \cos^4\frac{\gamma}{2},$$

$$\text{(5')} \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = P(1 - \varepsilon)\rho_0 \cos^4\frac{\gamma}{2}.$$

Conditions de résistance. — La tension élastique développée en un point quelconque d'une partie circulaire du maillon a pour expression

$$E\delta + E\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\frac{\zeta}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}} = \frac{P}{\Omega}\sin\theta - \frac{P(\sin\theta - \varepsilon)}{I}\rho_0 \cos^4\frac{\gamma}{2}\frac{\zeta}{1 + \frac{\zeta}{\rho_0}},$$

et l'on voit que son maximum correspond à $\zeta = -a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; de sorte que le maillon tend à s'ouvrir à l'intérieur de la naissance des parties courbes. En exprimant que ce maximum est au plus égal à la limite Γ que l'on se donne *a priori*, on a

$$\frac{P}{\Omega} + \frac{P(1 - \varepsilon)}{I}\rho_0 \cos^4\frac{\gamma}{2}\frac{a}{1 + \frac{a}{\rho_0}} \leq \Gamma,$$

ou

$$\text{(8)} \qquad \frac{\Gamma\pi}{P}\rho_0^2 \sin^3\gamma > \sin\gamma + \frac{4(1 - \varepsilon)\cos^4\frac{\gamma}{2}}{1 - \sin\gamma}.$$

L'équation

$$\frac{\Gamma\pi\rho_0^2}{P}\sin^2\gamma - 1 = \frac{4(1 - \varepsilon)\cos^4\frac{\gamma}{2}}{(1 - \sin\gamma)\sin\gamma}$$

fera connaître la limite supérieure de $\sin\gamma = \frac{a}{\rho_0}$.

En posant

$$\sin\gamma_1 = \sqrt{\frac{P}{\Gamma\pi\rho_0^2}},$$

et remplaçant ε par sa valeur, cette équation devient

$$(9)\qquad \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\gamma_1} - 1 = \frac{4\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \tang^2\frac{\gamma}{2}\right)\cos^4\frac{\gamma}{2}}{\left(k + \frac{\pi}{2}\right)(1 - \sin\gamma)\sin\gamma}.$$

On calcule ordinairement γ comme si la chaîne était formée de deux tiges parallèles, ce qui revient à prendre $\gamma = \gamma_1$; mais, d'après l'équation précédente, on voit que cette valeur est trop faible d'une certaine quantité due aux parties courbes des maillons, et qu'elle conduit à donner au fer un trop faible équarrissage.

D'autre part, l'équation (9) ne peut être résolue que dans chaque cas particulier, et encore sa solution présente-t-elle des difficultés sérieuses. Nous éviterons ce double inconvénient en prenant pour $\sin\gamma$ une valeur approximative un peu forte, ce qui ne peut qu'être avantageux au point de vue de la sécurité. A cet effet, remarquons d'abord que le dénominateur du second membre de l'équation (9) croît à partir de $\sin\gamma = 0$ jusqu'à $\sin\gamma = \frac{1}{2}$, valeur que l'on ne dépasse jamais dans la pratique; il est par suite supérieur à

$$\left(k + \frac{\pi}{2}\right)(1 + \sin\gamma_1)\sin\gamma_1.$$

Le numérateur décroît, comme il est facile de s'en assurer, lorsque l'on fait croître γ à partir de zéro; il est donc inférieur à

$$4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right);$$

de sorte que, si nous posons

$$(9')\quad \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\gamma_1} = 1 + \frac{4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\left(k + \frac{\pi}{2}\right)(1 + \sin\gamma_1)\sin\gamma_1} = 1 + \frac{2,28}{(k + 1,57)(1 + \sin\gamma_1)\sin\gamma_1},$$

nous serons certains d'obtenir pour $\sin\gamma$ une valeur plus que suffisante pour assurer la sécurité.

La condition de résistance des branches rectilignes est également

donnée par l'inégalité (8), et l'on voit qu'elles ont la même tendance à s'ouvrir le long de leur génératrice intérieure.

Il est facile de voir que tout ce qui précède s'applique aux maillons circulaires, en supposant $k = 0$.

Déformation d'un maillon. — Pour les branches rectilignes, on a, en intégrant l'équation (6') et désignant par M une constante arbitraire,

$$(10) \qquad y = \frac{Px^2}{2EI}(1 - \varepsilon + M)\rho_0 \cos^4 \frac{\theta}{2} = \frac{Px^2}{8E\pi\rho_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}(1 - \varepsilon + M).$$

Soit $r = \rho_0(1 + u)$ le rayon vecteur, correspondant à l'angle primitif θ de la fibre moyenne déformée, u et ses dérivées par rapport à cet angle étant censées des quantités assez petites pour qu'il suffise d'en conserver les premières puissances. L'équation (3') peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{EI}(\sin\theta - \varepsilon)\rho_0^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} = \frac{P}{4E\pi\rho_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}(\sin\theta - \varepsilon);$$

d'où, en intégrant et remarquant que $\frac{du}{d\theta} = 0$ pour $\theta = 0$,

$$(11) \qquad u = \frac{P}{4E\pi\rho_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}\left(-\frac{\theta\cos\theta}{2} - \varepsilon + N\cos\theta\right),$$

N étant une autre constante arbitraire.

Si l'on désigne par $\Delta\theta$ la variation qu'a éprouvée l'angle θ à la suite de la déformation, celles de l'ordonnée et l'abscisse du point considéré ont respectivement pour valeurs

$$\Delta y = \rho_0(1 + u)\sin(\theta + \Delta\theta) - \rho_0 \sin\theta = \rho_0(u\sin\theta + \cos\theta\,\Delta\theta),$$
$$\Delta x = \rho_0(1 + u)\cos(\theta + \Delta\theta) - \rho_0\cos\theta = \rho_0(u\cos\theta - \sin\theta\,\Delta\theta);$$

d'où

$$(12) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta y = \rho_0 u \\ \Delta x = -\rho_0\Delta\theta \end{array}\right. \quad \text{pour } \theta = \frac{\pi}{2};$$

mais on a

$$\frac{d\Delta\theta}{d\theta} + u = \delta = \delta_1 \sin\theta = \frac{P \sin\theta}{4 E \pi \rho_0^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2}};$$

d'où, en remarquant que $\Delta\theta = 0$ pour $\theta = 0$,

$$\Delta\theta = \frac{P}{4 E \pi \rho_0^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\theta \sin\theta - 2 \sin^3 \frac{\theta}{2}}{2} + \varepsilon\theta - N \sin\theta \right) \right],$$

et l'on a pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{P}{4 E \pi \rho_0^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) - \frac{1}{2} - N \right] \right\}, \\ \Delta y &= - \frac{P \varepsilon}{4 E \pi \rho_0 \sin^4 \frac{\gamma}{2}}, \\ \Delta x &= - \frac{P}{4 E \pi \rho_0 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) - \frac{1}{2} - N \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Or ces dernières valeurs de Δy et Δx sont respectivement égales à celle de $y - \rho_0$, déduite de l'équation (10) pour $x = l$, et à $l\delta_1 = k\rho_0\delta_0$, ce qui permet de déterminer les constantes M et N; mais il nous suffit de connaître la seconde de ces constantes, qui a pour expression

$$(14) \qquad N = (1 + k) \operatorname{tang}^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) - \frac{1}{2}.$$

Désignant par ξ la valeur de $\rho_0 u$ pour $\theta = 0$, nous aurons

$$\xi = \frac{P}{4 E \pi \rho_0^2 \sin^4 \frac{\gamma}{2}} (N - \varepsilon),$$

d'où, pour le travail moléculaire développé dans le maillon

$$(15) \qquad \mathfrak{T} = 4\int P\,d\xi = \frac{(N-\varepsilon)P^2}{2E\pi\rho_0 \sin^4 \frac{\gamma}{2}}.$$

Supposons qu'une chaîne composée de n maillons soit fixée par son extrémité supérieure et que son autre extrémité soit élevée à une hauteur H au-dessus de sa position d'équilibre naturel, puis qu'on y accroche un poids Q; si on laisse retomber ce poids, on aura, en appelant V sa vitesse vibratoire et négligeant l'inertie de la chaîne,

$$\frac{QV^2}{2g} = QH - \frac{\mathfrak{T}}{n} = QH - \frac{(N-\varepsilon P^2}{2E\pi\rho_0 \sin^4 \frac{\gamma}{2}}.$$

Le maximum de P correspond à $V = 0$, et a pour valeur

$$(16) \qquad P = \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{2E\pi\rho_0 QH}{N-\varepsilon}}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (9), après avoir substitué celle de $\sin\gamma_1$, on calculera $\sin\gamma$ et a sera, par suite, déterminé.

Application aux chaînes de sûreté du matériel des chemins de fer. — Supposons qu'une barre d'attelage vienne à se briser. Avant que le mécanicien ait pu fermer le régulateur de la machine, le mouvement de la première partie du train s'accélérera; l'inverse aura lieu pour la seconde partie, jusqu'au moment où un choc se produira sur les chaînes de sûreté.

Proposons-nous de déterminer la tension maximum élastique, développée dans ces chaînes pendant le choc, en admettant qu'elles ne se rompent pas, hypothèse qui sera ou non justifiée par les résultats du calcul.

Soient

T l'effort de traction, estimé en kilogrammes, en tenant compte des résistances passives de la machine et du tender;

M, m les masses d'avant et d'arrière du train, séparées par la barre d'attelage rompue;

S, s les chemins parcourus au bout du temps t après la rupture par M et m avant que les chaînes ne soient tendues;

φ l'accélération due à T, définie par $T = (M + m)\varphi$;

e l'excès de la longueur des chaînes sur la distance normale des attaches.

Immédiatement après la rupture, le mouvement de m, qui n'est plus sollicité par $m\varphi$, force qui faisait équilibre aux résistances passives développées dans la partie postérieure du train, sera retardé; et comme, pendant un temps aussi court que celui qui s'écoule entre la rupture de la barre et la tension des chaînes, ces résistances ne varient pas sensiblement, nous aurons, en appelant V_0 la vitesse du train au moment où la rupture a lieu,

$$s = V_0 t - \varphi \frac{t^2}{2}.$$

Le mouvement de la masse M s'accélérera, au contraire, sous l'action de l'effort $T - M\varphi = m\varphi$, qui excède celui qui est nécessaire pour vaincre les résistances passives développées dans la partie antérieure du train, d'où l'accélération $\frac{m\varphi}{M}$ et par suite

$$S = V_0 t + \frac{1}{2}\frac{m}{M}\varphi t^2.$$

Les chaînes seront tendues lorsque l'on aura $S - s = e$ ou, au bout du temps,

$$t = \sqrt{\frac{2eM}{(M + m)\varphi}},$$

et l'on aura, pour les vitesses correspondantes de M et m,

$$v = V_0 - \varphi t = V_0 - \sqrt{\frac{2eM\varphi}{M + m}},$$

$$V = V_0 + \frac{m}{M}\varphi t = V_0 + \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2eM\varphi}{M + m}},$$

d'où

$$(16) \qquad V - v = \sqrt{\frac{2e\varphi(M+m)}{M}} = \sqrt{\frac{2eT}{M}}.$$

Au moment où les chaînes auront atteint leur plus grand allongement, M et m posséderont la même vitesse de translation U, et l'on aura, d'après un théorème connu,

$$MV + mv = (M+m)U.$$

En partant de là, on trouve, en ayant égard à la relation (16) pour la demi-force vive perdue pendant le choc,

$$\frac{MV^2 + mv^2 - (M+m)U^2}{2} = \frac{Mm}{2(M+m)}(V-v)^2 = \frac{m}{M+m}Te.$$

Si n est le nombre des maillons de chacune des chaînes, le travail moléculaire développé dans chaque maillon est

$$\frac{Te}{2n}\frac{m}{M+m}.$$

On a donc, en vertu de l'équation (15),

$$\frac{(N-\varepsilon)P^2}{2E\pi\rho_0\sin^4\frac{\gamma}{2}} = \frac{Te}{2n}\frac{m}{M+m},$$

d'où

$$(17) \qquad P = \sin^2\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{E\pi\rho_0 Te}{(N-\varepsilon)n}\frac{m}{M+m}}.$$

En portant cette expression dans la formule (9) après y avoir substitué celle de $\sin\gamma_1$, on obtiendra la valeur Γ de la plus grande tension élastique développée.

Nous supposerons dorénavant, ce qui est évidemment permis, que M et m représentent les poids, exprimés en tonnes, des deux parties du train, et nous admettrons la formule empirique suivante, due à M. Wyndam Harding :

$$(18) \qquad T = (2,72 + 0,094W)(M+m) + 0,00484aW^2,$$

dans laquelle W est la vitesse du train par heure, exprimée en kilomètres, et $\mathcal{A}$ la surface maximum du train exposée à la résistance de l'air, estimée en mètres carrés.

Appliquons les considérations qui précèdent à l'exemple suivant, emprunté à la Compagnie des chemins de fer de Paris à Lyon et à la Méditerranée :

Machine mixte, série 700, avec charge maximum . .	32 tonnes.
Tender.....	22 »
Charge maximum que peut remorquer la machine..	582 »
Total.....	$M + m = 636$ tonnes;
Vitesse maximum du train.....	$W = 30$ kilomètres;

$$\mathcal{A} = 2,6 \times 2,41 = 6,266.$$

La formule (18) donne, dans ces conditions,

$$\frac{T}{M + m} = 5,58.$$

Nous avons maintenant

$$a = 0^m,011, \quad \rho_0 = 0^m,034, \quad l = 0,052, \quad n = 5, \quad e = 0^m,30,$$

d'où

$$k = 1,530, \quad \sin\gamma = \frac{a}{\rho_0} = 0,323, \quad \varepsilon = 0,807, \quad N = 1,624.$$

Les formules (17) et (9) donnent respectivement

$$P = 811\sqrt{m},$$
$$\Gamma = 10^6 . 9,314\sqrt{m}.$$

Ainsi, en supposant $m = 49$ tonnes, on a

$$\Gamma = 10^6 . 58,85,$$

tandis que la résistance à la rupture admise des fers au bois de première qualité est $10^5.60$. En admettant que les chaînes de sûreté soient formées de cette matière, le poids total d'un wagon étant estimé à

9 tonnes, la rupture de la barre d'attelage reliant le sixième au septième wagon de queue entraînera celle des chaînes de sûreté correspondantes.

J'avais déjà démontré l'inanité des chaînes de sûreté à la suite d'une analyse moins complète que la précédente, dans une Note insérée au Compte rendu de la séance du 14 août 1871 de l'Académie des Sciences. Je terminais cette Note en proposant de transformer les chaînes de sûreté en chaînes de secours accrochées respectivement à leur propre wagon, et qui serviraient à l'occasion à réunir les deux parties du train et à les conduire doucement à la gare suivante; mais ma proposition n'a eu aucun succès administratif.

Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions;

PAR M. A. MANNHEIM.

Dans les Communications que j'ai faites à l'Académie des Sciences, dans le courant de mars 1873 (*voir* les *Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 551 et 635), je me suis occupé des lignes décrites par les points d'une figure de forme invariable, dont le déplacement est assujetti à cinq conditions.

Je me propose aujourd'hui d'étudier ce qui est relatif aux surfaces trajectoires des points d'une figure assujettie seulement à quatre conditions.

Je commence par le cas où la figure est une simple ligne droite. Si trois points d'une droite sont assujettis à rester sur trois surfaces données, le déplacement de cette droite peut être effectué d'une infinité de manières. A chacun de ces déplacements correspond, pour un point de la droite, une ligne trajectoire, et toutes les lignes trajectoires relatives à un même point appartiennent à ce que j'ai appelé la *surface trajectoire* de ce point [*].

C'est dans mon Mémoire intitulé *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* qu'on trouve, pour la première fois, des recherches relatives aux surfaces trajectoires des points d'une figure mobile.

Ces surfaces trajectoires des points d'une figure constituent dans l'espace l'élément correspondant aux lignes décrites pendant le déplacement d'une figure plane sur son plan.

La considération des surfaces trajectoires permet d'étendre facile-

[*] *Recueil de Mémoires des Savants étrangers*, t. XX.

ment au cas de l'espace les propriétés relatives aux lignes trajectoires planes.

Ces surfaces trajectoires sont, à proprement parler, la généralisation de ces lignes.

Ainsi, sur un plan, on sait que :

« Lorsqu'une droite est normale à la trajectoire d'un de ses points, elle est normale aux trajectoires de tous ses points ».

De même, dans l'espace :

« Lorsqu'une droite est normale à la surface trajectoire d'un de ses points, elle est normale aux surfaces trajectoires de tous ses points ».

Pour le cas du déplacement d'une figure plane sur son plan :

« Les normales aux trajectoires des points de cette figure passent par un même point. »

Dans le cas de l'espace, la propriété analogue est la suivante :

Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure rencontrent, toutes, deux mêmes droites.

Ce dernier théorème, qui est fondamental [*], donne lieu à des conséquences remarquables. J'ai pu déjà en déduire une construction des centres de courbure principaux de la surface des ondes, ainsi que la direction des lignes de courbure de cette surface [**]. J'en ai déduit aussi une théorie géométrique de la courbure des surfaces [***]. Aujourd'hui j'en donne encore une application.

Au début de ce travail, je fais connaître une nouvelle démonstration directe de cet important théorème; puis je cherche combien il y a de points sur une droite mobile dont les trajectoires jouissent de certaines propriétés sur les surfaces trajectoires de ces points.

Le nombre de ces points donne immédiatement le degré du lieu de tous les points analogues de l'espace.

Pour le cas du déplacement d'une figure plane sur son plan, il est utile de considérer les points imaginaires à l'infini situés sur un cercle.

---

[*] Je l'ai énoncé pour la première fois à la Société philomathique, en 1866. (Voir *Bulletin de la Société philomathique*, séance du 14 juillet 1866.)

[**] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 11 février 1867.

[***] *Mémoire sur les pinceaux de droites.* (*Journal de Mathématiques*, t. XVII, 2e série, 1872.)

Ces points sont immobiles pendant le déplacement. Il suffit, en effet, pour le démontrer, de remarquer qu'ils appartiennent toujours aux circonférences de cercle situées sur le plan mobile et entraînées avec ce plan. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Pendant le déplacement d'un plan qui glisse sur lui-même en entraînant tous ses points, les points imaginaires à l'infini situés sur un cercle sont immobiles.*

Dans le cas du déplacement d'une figure dans l'espace, c'est le cercle imaginaire à l'infini situé sur une sphère que nous considérerons. Ce cercle n'est immobile qu'en tant que ligne; il glisse sur lui-même pendant le déplacement. Il suffit, en effet, pour le démontrer, d'entraîner des sphères en même temps que la figure mobile. Toutes ces spheres ne cesseront pas de passer par le même cercle à l'infini. Les points de ce cercle se déplacent, car, si l'on coupe une des sphères par un plan, cette sphère passe bien toujours par le même cercle, mais le plan sécant entraîné ne passe pas par les mêmes points de ce cercle. Nous voyons donc que :

THÉORÈME II. — *Pendant le déplacement d'une figure entraînant tous les points de l'espace, le cercle imaginaire à l'infini glisse sur lui-même.*

En Cinématique, où l'on étudie les déplacements d'une figure de forme invariable, ces éléments imaginaires, points ou cercle, purement géométriques et n'ayant aucun sens mécanique, n'ont pas été introduits. L'utilité de leur emploi ressortira de ce travail.

L'étude des lignes trajectoires décrites par les points d'une figure sur les surfaces trajectoires de ces points est nouvelle et digne d'intérêt. On connaît seulement, dans cet ordre de recherches, la belle solution de Dupin pour la description mécanique des lignes de courbure d'un ellipsoïde engendré par un point d'une droite dont trois points sont assujettis à rester sur trois plans donnés.

§ I. *Préliminaires.*

Appelons G une droite mobile; a, b, c trois de ses points; (A), (B), (C) les surfaces données sur lesquelles ces points doivent se déplacer.

Enfin désignons par A, B, C les normales à ces surfaces issues, à un instant quelconque, des points a, b, c. Un déplacement infiniment petit quelconque de G s'obtient au moyen d'une rotation autour d'une *droite conjuguée* de G. Cette conjuguée, devant rencontrer A, B, C, est une génératrice de l'hyperboloïde défini par ces trois droites.

Une quelconque des génératrices de cet hyperboloïde du même système que G est une conjuguée de G relative à l'un des déplacements de cette droite.

Les plans passant par ces différentes conjuguées et un même point e de G sont respectivement normaux aux lignes trajectoires décrites par ce point pendant les déplacements qu'on peut imprimer à la droite G, à partir de la position qu'elle occupe.

Tous ces plans normaux se coupent suivant une génératrice de l'hyperboloïde du même système que A, B, C, et cette génératrice est la normale à la surface trajectoire du point e. Nous voyons ainsi que :

THÉORÈME III. — *Le lieu des normales aux surfaces trajectoires des points d'une droite est un hyperboloïde.*

Supposons que G fasse partie d'une figure de forme invariable et qu'un point m de cette figure soit assujetti à se déplacer sur une surface (M), pendant que les points a, b, c de G se déplacent sur (A), (B), (C). Désignons par A, B, C, M les normales à ces surfaces issues, à un instant quelconque, des points a, b, c, m.

Les normales aux surfaces trajectoires des points de G appartiennent à un hyperboloïde (A, B, C), qui est rencontré par M en deux points. Par ces points passent les génératrices D, Δ de cet hyperboloïde, du même système que G. Par le point m menons une droite H qui rencontre G au point n. Le plan des deux droites G, H coupe l'hyperboloïde (A, B, C) suivant G et une droite L. Désignons par l le point où cette droite rencontre H.

La normale N à la surface trajectoire du point n rencontre D, Δ; il en est de même de L, qui est normale à la surface trajectoire du point l. L'hyperboloïde (A, B, C) et l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires des points de H, qui se coupent suivant les droites L, N, se coupent en outre suivant les droites D, Δ. Les normales aux surfaces trajectoires des points de H rencontrent donc D

et Δ, et comme la droite H est quelconque dans le plan (G, m), il en est de même des normales aux surfaces trajectoires de tous les points de ce plan.

La normale à la surface trajectoire d'un point quelconque de la figure rencontre ce plan en un point, et cette droite, étant normale à la surface trajectoire de ce point, s'appuie alors aussi sur D et Δ; donc :

THÉORÈME IV. — *Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable rencontrent, toutes, deux mêmes droites.*

Remarques. — Nous continuerons à désigner ces deux droites par D, Δ.

Les normales aux surfaces trajectoires de deux points quelconques de la figure mobile ne peuvent se rencontrer que sur ces droites.

Un point quelconque de D ou de Δ décrit toujours le même élément de ligne, quels que soient les déplacements de la figure mobile. Le plan normal à l'élément de ligne décrit par un point de l'une de ces droites est le plan passant par ce point et par l'autre droite.

§ II.

Reprenons la droite mobile G et l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires de ses points. Parmi les génératrices de cet hyperboloïde, il y en a deux d'un même système qui sont perpendiculaires à une génératrice du système différent. Il y a donc deux points de G dont les surfaces trajectoires ont pour normales des droites perpendiculaires à G, c'est-à-dire dont les surfaces trajectoires sont tangentes à G. Ainsi :

THÉORÈME V. — *Parmi les surfaces trajectoires des points d'une droite mobile, il y en a deux qui sont tangentes à cette droite.*

Les plans tangents aux surfaces trajectoires des points d'une droite sont respectivement perpendiculaires aux génératrices d'un hyperboloïde; ils sont donc parallèles aux plans tangents au cône supplémentaire du cône directeur de cet hyperboloïde. Ce cône supplémentaire, qui est du deuxième ordre, est le cône directeur de la développable enveloppe de ces plans tangents. Ainsi :

Théorème VI. — *La développable enveloppe des plans tangents aux surfaces trajectoires des points d'une droite a un cône directeur du deuxième ordre.*

Cherchons le degré de cette développable. Considérons pour cela un premier déplacement de G : nous savons que les tangentes aux trajectoires des points de cette droite appartiennent à un paraboloïde contenant G. Pour un autre déplacement de la droite mobile, à partir de sa première position, nous aurons un autre paraboloïde passant aussi par G. Les tangentes aux trajectoires d'un même point m pour ces deux déplacements sont donc les génératrices de deux paraboloïdes. Le plan de ces tangentes étant le plan tangent à la surface trajectoire du point m, nous voyons ainsi que les plans tangents aux surfaces trajectoires des points d'une droite sont tangents à deux paraboloïdes ayant une génératrice commune; par suite l'enveloppe de ces plans tangents est du quatrième ordre et de la troisième classe. Ainsi :

Théorème VII. — *La développable enveloppe des plans tangents aux surfaces trajectoires de tous les points d'une droite est du quatrième ordre et de la troisième classe.*

Nous savons que les axes de courbure des trajectoires des points d'une droite mobile G appartiennent à un hyperboloïde qui contient la conjuguée de G relative au déplacement de cette droite [*].

Cet hyperboloïde des axes de courbure et l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires des points de G se coupent suivant cette droite conjuguée de G et suivant une cubique gauche. Un point de cette cubique est le point de rencontre de l'axe de courbure d'un certain point m de G avec la normale à la surface trajectoire de ce point. Ce point de la cubique est donc le centre de courbure de la section faite dans cette surface trajectoire par un plan normal à cette surface et qui contient la tangente à la ligne trajectoire du point m. Nous pouvons donc dire :

Théorème VIII. — *Les plans normaux aux surfaces trajectoires*

---

[*] Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 3 mars 1873.

des points d'une droite, qui contiennent respectivement les lignes décrites par les points de cette droite pendant un déplacement quelconque, déterminent, dans ces surfaces trajectoires, des sections dont les centres de courbure sont sur une cubique gauche.

Un point à l'infini sur cette cubique correspond à une section normale à une surface trajectoire, dont le plan contient la tangente à une ligne asymptotique de cette surface trajectoire. Comme il y a trois points de cette cubique qui sont à l'infini, nous avons ce théorème :

THÉORÈME IX. — *Sur une droite mobile, il y a trois points dont les trajectoires sont tangentes à des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires.*

Puisque, sur une droite quelconque, il y a trois points de cette nature, les points d'une figure de forme invariable, qui jouissent de la propriété de décrire des éléments de lignes asymptotiques sur leurs surfaces trajectoires, appartiennent à une surface du troisième ordre. Cette surface doit contenir D et Δ, car les points de chacune de ces droites décrivent toujours les mêmes éléments de lignes. Ainsi :

THÉORÈME X. — *Le lieu des points d'une figure de forme invariable dont les trajectoires sont tangentes à des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires est une surface du troisième ordre qui contient les droites* D, Δ.

Pour chaque déplacement, on a une surface du troisième ordre différente. On peut remarquer que par un point quelconque il ne passe que deux de ces surfaces du troisième ordre. Ces deux surfaces correspondent aux déplacements qui font décrire à ce point des éléments des deux lignes asymptotiques de sa surface trajectoire.

Si une droite est telle que, pour un déplacement, les trajectoires de quatre de ses points sont tangentes à des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points, cette droite est tout entière sur la surface du troisième ordre relative à ce déplacement, et, par suite, tous ses points jouissent de cette propriété. Ainsi :

THÉORÈME XI. — *Si les trajectoires de quatre points d'une droite sont tangentes à des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points, il en est de même des trajectoires de tous les points de la droite.*

Tous les points des droites réelles de la surface du troisième ordre dont nous venons de parler jouissent de la propriété de décrire simultanément des éléments de lignes asymptotiques sur leurs surfaces trajectoires. Comme sur une surface du troisième ordre il y a toujours une droite réelle, nous voyons que :

THÉORÈME XII. — *Dans une figure de forme invariable, il existe toujours une droite dont tous les points décrivent des éléments de lignes asymptotiques sur leurs surfaces trajectoires.*

Je ne compte pas les droites D, Δ, qui peuvent être imaginaires.

Pour deux instants consécutifs, nous pouvons considérer deux surfaces du troisième ordre analogues à la précédente. Les points de la ligne d'intersection de ces deux surfaces décrivent des trajectoires ayant successivement deux éléments communs avec des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires, c'est-à-dire ayant avec ces lignes asymptotiques un contact du deuxième ordre. Les deux surfaces du troisième ordre se coupent suivant une ligne de l'ordre 3^2. Ainsi :

THÉORÈME XIII. — *Le lieu des points d'une figure dont les trajectoires ont avec des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires un contact du deuxième ordre est une ligne d'ordre* 3^2.

Introduisons, pour un troisième instant, une troisième surface du troisième ordre. Cette surface coupe les deux premières aux points dont les trajectoires ont un contact du troisième ordre avec des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points. Ces trois surfaces se coupent en 3^3 points. Ainsi :

THÉORÈME XIV. — *Les points d'une figure dont les trajectoires ont un contact du troisième ordre avec des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points sont au nombre de* 3^3.

La cubique gauche qui entre dans l'énoncé du théorème VIII rencontre la droite G en deux points. Ces deux points de G sont donc confondus avec les centres de courbure des sections normales à leurs surfaces trajectoires. Ces sections normales ont alors leurs rayons de courbure nuls, et par suite il en est de même des trajectoires de ces deux points de G. Nous reviendrons plus loin sur les points d'une figure dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls.

Cherchons combien il y a de points sur une droite dont les trajectoires ont leurs plans osculateurs normaux aux surfaces trajectoires de ces points.

Prenons un plan parallèle aux tangentes aux trajectoires de tous les points de la droite mobile G, et considérons sur ce plan la trace du cône directeur de la développable enveloppe des plans osculateurs des trajectoires de G. Par le sommet de ce cône menons des parallèles aux normales des surfaces trajectoires des points de G. Ces parallèles sont les génératrices d'un deuxième cône du second ordre.

On demande alors un plan tangent au premier cône directeur, qui coupe celui-ci suivant une droite perpendiculaire à la trace de ce plan tangent sur le plan de la base du premier cône.

Le lieu des perpendiculaires abaissées du sommet de nos cônes sur les tangentes à la base du premier de ces cônes est du troisième ordre. Ce cône du troisième ordre coupe le cône directeur de l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires des points de G suivant six génératrices. Il y a donc six droites répondant à la question que nous nous étions posée, et, par suite :

Théorème XV. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une droite, il y a six points de cette droite dont les trajectoires ont leurs plans osculateurs normaux aux surfaces trajectoires de ces points.*

Ou, en d'autres termes :

Sur une droite mobile, il y a six points dont les trajectoires sont osculatrices à des géodésiques de leurs surfaces trajectoires.

Il résulte immédiatement de là que :

Théorème XVI. — *Le lieu des points d'une figure dont les trajectoires ont leurs plans osculateurs normaux aux surfaces trajectoires de ces points est une surface du sixième ordre.*

Avant d'examiner ce qui concerne les points d'une figure de l'espace dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls, je vais dire un mot du sujet analogue pour le cas du déplacement d'une figure plane sur son plan.

Pour que le rayon de courbure de la trajectoire d'un point soit nul, il faut que, pour un déplacement infiniment petit, l'arc décrit soit infi-

niment petit d'ordre supérieur. D'après cela, le centre instantané de rotation est le seul point *réel* dont la trajectoire ait un rayon de courbure nul.

Mais nous savons que *le lieu des centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite est une conique* [*]. Les points de rencontre de la droite et de cette conique sont ceux dont la trajectoire a un rayon de courbure nul; d'après ce que je viens de dire, ces deux points doivent être imaginaires. Comme il y a aussi deux points imaginaires sur toute droite du plan mobile, les points de ce plan dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls appartiennent à une conique imaginaire.

Le centre instantané de rotation, étant un point réel de ce lieu, doit être un point double, c'est-à-dire que cette conique se compose de deux droites imaginaires.

Je dis de plus que ce lieu passe par les points imaginaires à l'infini situés sur un cercle. Pour le montrer, considérons sur le plan mobile une circonférence de cercle tangente, à la base de la roulette du mouvement épicycloïdal de ce plan, au centre instantané de rotation. Le lieu des centres de courbure des trajectoires des points de cette circonférence est, comme il est facile de le voir, une circonférence de cercle tangente à la première au centre instantané de rotation. Les points d'intersection de ces deux circonférences, qui ne sont autres que les points imaginaires à l'infini, doivent donc être considérés comme donnant lieu chacun à une trajectoire dont le rayon de courbure est nul. Nous avons du reste vu que ces points sont immobiles.

Il résulte de là déjà que :

Théorème XVII. — *Les centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe qui passe par les points imaginaires à l'infini situés sur un cercle appartiennent à une courbe qui passe aussi par ces points* [**].

---

[*] Cette propriété est due à M. Rivals. Elle a été publiée dans un Mémoire de M. Bresse, inséré dans le XXXVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

[**] La formule de Savary donne très-simplement l'équation en coordonnées polaires du lieu des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe quelconque. (Voir *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIIe cahier : *Constructions des centres de courbure*, etc.)

On voit aussi que les points du plan dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls appartiennent à deux droites imaginaires se coupant au centre instantané de rotation et passant par les points imaginaires à l'infini. Les droites imaginaires qui sont les asymptotes d'un cercle de rayon nul ont été nommées *droites isotropes* par M. Laguerre.

En faisant usage de cette expression, nous dirons alors :

THÉORÈME XVIII. — *Lorsqu'un plan glisse sur lui-même, le lieu des points de ce plan dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls se compose des droites isotropes qui se coupent au centre instantané de rotation.*

On peut arriver immédiatement à ce résultat en employant la formule de Savary.

Ce dernier procédé, pas plus que ce que j'ai dit précédemment pour démontrer le théorème XVIII, ne laisse voir la marche à suivre pour arriver aux généralisations des derniers théorèmes énoncés.

Une simple remarque nous éclairera à ce sujet.

Relativement à l'un quelconque de ses points, une droite isotrope qui passe par le centre instantané est normale à la trajectoire de ce point. Les points du plan mobile dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls sont donc ceux dont les normales à ces lignes trajectoires sont des droites isotropes. Nous sommes donc conduit à faire remarquer que :

THÉORÈME XIX. — *Lorsqu'en un point non singulier d'une courbe la normale est une droite isotrope, cette courbe a en ce point un rayon de courbure nul.*

Cette normale isotrope est aussi, comme l'on sait, tangente à la courbe. On peut donc énoncer ce théorème en parlant de tangente au lieu de normale.

Analytiquement, ce théorème résulte immédiatement de l'expression du rayon de courbure d'une courbe plane, puisque le numérateur de cette expression, égalé à zéro, montre que les points de la courbe pour lesquels le rayon de courbure est nul sont ceux pour lesquels la tangente à la courbe a pour coefficient angulaire $\pm\sqrt{-1}$.

Dans le cas d'une figure de l'espace, nous considérerons le cercle

imaginaire à l'infini situé sur une sphère. Les plans tangents à ce cercle sont des *plans isotropes*, et les droites qui rencontrent ce cercle sont des *droites isotropes*.

Reprenons la droite G de l'espace. Les points de cette droite dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls sont ceux pour lesquels ces trajectoires ont pour tangentes des droites isotropes. Les plans normaux en ces points à ces courbes qui passent par la conjuguée de G doivent donc être des plans isotropes. Il y aura donc sur la droite deux points dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls, puisque par la conjuguée de cette droite on ne peut mener que deux plans isotropes. Ainsi :

Théorème XX. — *Sur une droite mobile, il y a deux points imaginaires dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls.*

Nous aurions pu arriver à ce résultat en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment pour le cas d'une droite mobile sur un plan.

En effet, dans le cas du déplacement infiniment petit d'une figure dans l'espace, les arcs décrits simultanément sont du même ordre. Il n'y a donc pas de point réel dont la trajectoire ait son rayon de courbure nul. Nous savons que le lieu des axes de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite est un hyperboloïde [*] ; les deux points de rencontre de la droite mobile et de cet hyperboloïde sont ceux dont les trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls.

Si l'axe de courbure qui rencontre la droite n'était pas relatif à la trajectoire de ce point de rencontre, mais bien à la trajectoire d'un autre point de la droite mobile, il en résulterait que cette droite serait normale à la trajectoire de ce point et, par suite, aux trajectoires de tous ses points. Elle rencontrerait alors les axes de courbure des trajectoires de tous ses points et serait tout entière sur l'hyperboloïde lieu de ces axes.

Nous voyons donc comment on retrouve le théorème XX, et nous voyons, en outre, que :

---

[*] Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 3 mars 1873.

THÉORÈME XXI. — *Lorsqu'une droite est normale à la trajectoire d'un de ses points, elle est tout entière sur l'hyperboloïde des axes de courbure des trajectoires de ces points* [*].

Il résulte immédiatement du théorème XX que :

THÉORÈME XXII. — *Le lieu des points d'une figure de forme invariable dont les lignes trajectoires ont leurs rayons de courbure nuls est une surface imaginaire du second ordre.*

Occupons-nous maintenant des surfaces trajectoires des points d'une figure mobile.

Le théorème XIX peut se généraliser ainsi :

THÉORÈME XXIII. — *Lorsqu'en un point non singulier d'une surface la normale est une droite isotrope, cette surface a en ce point ses rayons de courbure principaux nuls, et réciproquement.*

Ce théorème résulte immédiatement de l'équation qui donne les rayons de courbure principaux d'une surface.

Si nous voulons obtenir maintenant les points d'une figure de forme invariable dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul, nous n'avons qu'à prendre ceux pour lesquels les normales à leurs surfaces trajectoires sont des droites isotropes. Mais toutes les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure rencontrent D et Δ; donc les points que nous cherchons sont ceux de la surface réglée formée par les droites isotropes qui rencontrent D, Δ. Cette surface, qui a pour directrices le cercle imaginaire à l'infini et les droites D, Δ, est du quatrième ordre. Nous avons donc ce théorème :

THÉORÈME XXIV. — *Le lieu des points d'une figure de forme invariable dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul est la surface réglée imaginaire du quatrième ordre qui passe par le cercle imaginaire et par les droites* D, Δ.

Cette surface a trois droites doubles : D, Δ et une droite à l'infini.

Puisque cette surface contient le cercle imaginaire à l'infini, nous

---

[*] Ce théorème résulte aussi de ce que l'hyperboloïde des axes de courbure des trajectoires des points d'une droite contient la conjuguée de cette droite, et que, dans le cas actuel, la droite mobile est à elle-même sa conjuguée.

pouvons énoncer le théorème suivant, tout à fait analogue au théorème XVII :

Théorème XXV. — *Les centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une surface qui contient le cercle imaginaire de l'infini appartiennent à une surface qui contient aussi ce cercle.*

Il résulte du théorème XXIV que :

Théorème XXVI. — *Sur une droite mobile, il y a quatre points imaginaires dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul.*

En un point quelconque de la surface du quatrième ordre lieu des droites isotropes rencontrant D et Δ, le plan tangent à la surface trajectoire de ce point est un plan isotrope. Si le point que l'on considère appartient aussi à une seconde surface du quatrième ordre analogue à la précédente et que l'on obtient après un déplacement infiniment petit de la figure mobile, ce point sera tel, qu'après son déplacement le plan tangent à sa surface trajectoire sera encore un plan isotrope. Ce point aura donc décrit un élément de la ligne de contact de sa surface trajectoire et de la développable isotrope qui est circonscrite à cette surface trajectoire, c'est-à-dire un élément de ligne de courbure de celle-ci. Il en est de même de tous les points de la ligne d'intersection de ces deux surfaces du quatrième ordre. Cette ligne d'intersection se compose du cercle imaginaire à l'infini, de trois droites doubles et d'une courbe du huitième ordre.

Introduisons, pour un nouveau déplacement, une troisième surface du quatrième ordre. Ces trois surfaces du quatrième ordre contiennent chacune le cercle imaginaire à l'infini et se coupent en quarante-six points. Ces points décrivent des trajectoires ayant un contact du second ordre avec des lignes de courbure de leurs surfaces trajectoires. Ils appartiennent à une courbe, à laquelle nous allons arriver, et dont tous les points jouissent de cette propriété. Pour cela, cherchons d'abord le lieu des points de l'espace dont les trajectoires sont tangentes à des lignes de courbure de leurs surfaces trajectoires.

Reprenons la droite mobile G et l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires de ses points. En vertu du théorème VIII, les centres

de courbure des sections normales aux surfaces trajectoires des points G, menées tangentiellement aux lignes décrites par les points de cette droite pour un déplacement arbitraire, sont sur une cubique gauche. Cette cubique varie avec le déplacement considéré. Sur chacune des normales aux surfaces trajectoires des points de G, les centres de courbure principaux sont des positions limites pour les points appartenant aux différentes cubiques qu'on peut obtenir ainsi. Le lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points de G est alors, sur l'hyperboloïde des normales, la courbe qui limite la région occupée par ces cubiques gauches. Ce lieu est donc l'enveloppe de ces cubiques. Les points de contact de ce lieu et de l'une des cubiques sont aux points d'intersection de deux cubiques gauches infiniment voisines; par suite, ils sont au nombre de quatre. Ces quatre points de contact correspondent à des sections normales dont les centres de courbure coïncident avec des centres de courbure principaux de surfaces trajectoires. Ces sections normales sont donc tangentes à des lignes de courbure de ces surfaces trajectoires. Ainsi :

THÉORÈME XXVII. — *Sur une droite mobile, il y a quatre points dont les trajectoires sont tangentes à des lignes de courbure des surfaces trajectoires de ces points.*

Nous pouvons aussi déduire de ce que nous venons de dire l'ordre de la courbe enveloppe des cubiques. Cette courbe est, en effet, rencontrée par une cubique en huit points, et comme elle a toujours deux points sur la normale à la surface trajectoire d'un point quelconque de G, elle doit avoir quatre points sur G [*]. Par suite, elle est du sixième ordre. Ainsi :

THÉORÈME XXVIII. — *Le lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une droite est une courbe gauche du sixième ordre.*

Du théorème XXVII nous concluons, comme précédemment, que :

[*] Ceci est une conséquence de la formule $pq' + p'q$, donnée par M. Chasles pour déterminer le nombre des points d'intersection de deux courbes gauches tracées sur un hyperboloïde. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 décembre 1861.)

Théorème XXIX. — *Le lieu des points d'une figure dont les trajectoires sont tangentes à des lignes de courbure de leurs surfaces trajectoires est une surface du quatrième ordre qui contient les droites* D, Δ.

Cette surface contient la courbe du huitième ordre que nous avons trouvée déjà. On peut aussi remarquer que par chaque point de l'espace il n'y a, en général, que deux déplacements donnant lieu à des surfaces du quatrième ordre passant par ce point.

La courbe lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points de G rencontre le plan de l'infini en six points. Ces centres de courbure à l'infini correspondent aux points de la droite G dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal infini, ou, en d'autres termes, qui ont un centre de courbure à l'infini, c'est-à-dire qui sont des *points paraboliques* sur leurs surfaces trajectoires. Nous voyons alors que :

Théorème XXX. — *Sur une droite mobile, il y a six points qui sont des points paraboliques sur leurs surfaces trajectoires.*

Par suite, comme précédemment, en remarquant que, parmi les points dont les surfaces trajectoires ont un centre de courbure à l'infini, il y a ceux du cercle imaginaire à l'infini :

Théorème XXXI. — *Le lieu des points d'une figure qui sont points paraboliques sur leurs surfaces trajectoires est une surface du sixième ordre qui contient le cercle imaginaire à l'infini.*

Théorème XXXII. — *La courbe dont les points décrivent des trajectoires tangentes aux lignes lieux des points paraboliques sur les surfaces trajectoires de ces points est de l'ordre* $6^2 - 2$.

Théorème XXXIII. — *Les points dont les trajectoires ont un contact du deuxième ordre avec les lignes lieux des points paraboliques sur les surfaces trajectoires de ces points sont au nombre de* $6^3 - 30$.

Ce que nous venons de dire à l'occasion des points dont les surfaces trajectoires ont un centre de courbure principal sur le plan de l'infini peut se répéter en considérant les points dont les surfaces trajectoires ont un centre de courbure principal sur un plan fixe quelconque. On trouve encore dans ce cas une surface du sixième ordre. Cette surface coupe le plan donné suivant une courbe du quatrième

ordre (théorème XXIV) et une droite double. Cette droite est, sur le plan donné, celle qui joint les traces sur ce plan des droites D, Δ.

Les normales aux surfaces trajectoires des points de G contiennent chacune deux points de la courbe du sixième ordre lieu des centres de courbure principaux de ces surfaces. Parmi ces normales, celles qui sont tangentes à cette courbe correspondent aux points de G dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux. Le nombre de ces normales, c'est-à-dire le nombre des génératrices de l'hyperboloïde des normales relatives à G, qui sont tangentes à la courbe du sixième ordre, donne le nombre de ces points. Au moyen d'une formule due à M. Chasles [*], on trouve que ce nombre est huit. Ainsi :

THÉORÈME XXXIV. — *Sur une droite mobile, il y a huit points dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux.*

De là résulte la conséquence suivante :

THÉORÈME XXXV. — *Le lieu des points d'une figure dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux est une surface du huitième ordre.*

Les points qui sont des ombilics sur leurs surfaces trajectoires sont ceux de la ligne double de cette surface du huitième ordre.

Cherchons maintenant combien il y a de points sur une droite dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires.

Considérons la droite G, l'hyperboloïde des normales aux surfaces trajectoires des points de G et la courbe du sixième ordre lieu des centres de courbure principaux de ces surfaces.

A partir d'un point quelconque de G sur la normale qui passe en ce point et en sens inverse des rayons de courbure principaux, portons des longueurs égales à ces rayons de courbure. Cette construction étant faite pour tous les points de G, les extrémités des segments ainsi obtenus appartiennent à une courbe du huitième ordre. Cette courbe rencontre la courbe du sixième ordre, lieu des centres de courbure

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 décembre 1861.

principaux des surfaces trajectoires des points de G, en vingt points. Parmi ces points, il y a sur G quatre points communs à ces deux courbes et à l'infini six autres points communs à ces deux courbes; les dix points restants sont répartis par paires sur les génératrices de l'hyperboloïde des normales. Le segment compris entre deux de ces points sur une même génératrice a son milieu sur G. Ce point de G est tel que sa surface trajectoire a des rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires; il y a donc, d'après ce qui précède, cinq points de G de cette nature. Ainsi :

THÉORÈME XXXVI. — *Sur une droite, il y a cinq points dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires.*

D'où l'on déduit :

THÉORÈME XXXVII. — *Le lieu des points d'une figure dont les surfaces trajectoires ont des rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires est une surface du cinquième ordre.*

En terminant, je dois faire remarquer que je ne me suis pas occupé ici des conséquences qui résultent de la considération d'une droite mobile, lorsque celle-ci occupe certaine position particulière.

J'aurai l'occasion de revenir sur ce sujet en parlant de la surface du sixième ordre lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'un plan. Ce lieu présente quelques analogies avec le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont un centre de courbure principal sur un plan. Ces deux lieux sont du sixième ordre, ils ont chacun trois droites doubles. Pour le premier, un point du plan donne lieu à deux centres de courbure; pour le deuxième, un point du plan donné correspond aux surfaces trajectoires de deux points.

Sur la méthode des moindres carrés;

PAR M. H. LAURENT.

Il existe, comme l'on sait, deux manières de justifier la méthode des moindres carrés. Si l'on désigne par $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ la probabilité que, dans une observation, l'erreur sera comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, la fonction $\varphi(\varepsilon)$ est ce que l'on appelle *facilité de l'erreur* ε. Laplace justifie la méthode des moindres carrés, quelle que soit la forme de la fonction $\varphi(\varepsilon)$, pourvu, bien entendu, que cette fonction $\varphi(\varepsilon)$ tende vers zéro pour $\varepsilon = \pm\infty$, et cela assez rapidement; mais la théorie de Laplace et de ses disciples suppose essentiellement que le nombre des observations soit très-grand. Pour de très-grands nombres d'observations, les premiers termes du développement de $\varphi(\varepsilon)$ jouent seuls un rôle important, en sorte que cette fonction se réduit sensiblement à la forme $\frac{h}{\sqrt{\pi}}(1 - \varepsilon^2 h^2)$, ou, ce qui revient au même, à la forme

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2},$$

et cela aux termes du quatrième ordre près. Il résulte de là que, si la facilité de l'erreur ε était précisément $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$, la méthode des moindres carrés serait justifiée, quel que soit le nombre des observations. Gauss et les Allemands admettent *a priori* que la facilité de l'erreur ε est $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$, et ils justifient l'emploi de cette fonction en admettant que la moyenne *arithmétique* de plusieurs mesures inexactes est la valeur la plus probable de la quantité mesurée. Or rien ne justifie *a priori* une telle hypothèse; tout, au contraire, porte à la rejeter, non pas immédiatement peut-être, mais ses conséquences sont géné-

ralement absurdes. Ainsi la facilité $\varphi(\varepsilon)$ de l'erreur ε doit être nulle pour des valeurs finies de ε, au moins dans un grand nombre de circonstances. Je défie l'observateur le moins exercé, vivrait-il plus de mille ans, en mesurant jour et nuit la même longueur d'environ 10 mètres, de commettre une erreur dépassant 1 mètre! Ainsi les erreurs dépassant une certaine limite sont impossibles et non pas peu probables. Quel est l'astronome qui commettrait une erreur de 361 degrés sur la mesure d'un angle?

J'ai entrepris, afin de renverser l'hypothèse de Gauss, une série de 1444 observations qui avaient pour but de me faire connaître approximativement la facilité de l'erreur ε dans un cas particulier. La grandeur mesurée était un angle de 16 degrés environ, formé par les rayons visuels émanant d'un endroit fixe et se dirigeant vers deux objets très-éloignés. L'instrument dont j'ai fait usage ne comportait pas d'erreur systématique; il donnait les angles à une minute près; c'était un pantomètre à lunette. La graduation du limbe, que j'ai étudiée avec soin, ne m'a pas semblé comporter d'erreur de division en promenant le vernier sur elle. L'instrument, muni de deux niveaux, permettait d'opérer dans un plan horizontal; d'ailleurs un défaut d'horizontalité de 2 degrés n'eût pas donné une erreur appréciable de 1 minute dans les résultats de l'observation. Enfin les objets visés étaient assez éloignés pour que l'erreur de mise en station descendît bien au-dessous de la minute.

L'instrument donnant la minute, toute erreur ε observée, ou, si l'on veut, la différence entre l'angle exact et l'angle observé, était un nombre rond ε de minutes, et par suite l'erreur vraie était, en réalité, comprise entre $(\varepsilon - \frac{1}{2})'$ et $(\varepsilon + \frac{1}{2})'$. Cela posé, soit n le nombre de fois que l'on observe l'erreur ε_n sur un nombre N d'observations. $\frac{n}{N}$ est la probabilité que l'erreur est comprise entre $\varepsilon_n - \frac{1}{2}$ et $\varepsilon_n + \frac{1}{2}$, et il y a, comme l'on sait, la probabilité $\Theta\left[l\sqrt{\frac{N^3}{2n(N-n)}}\right]$ ou

$$\Theta(\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma e^{-\gamma^2}d\gamma$$

que cette probabilité diffère de $\frac{n}{N}$ de moins de l. Nous prendrons

$\gamma = 1,82$; alors nous aurons

$$\Theta(\gamma) = 0,99.$$

Il y aura alors 100 à parier contre 1 que $\frac{n}{N}$ sera la probabilité de l'erreur ε_n avec une erreur moindre que l, donnée par la formule

$$1,82 = l\sqrt{\frac{N^3}{2n(N-n)}};$$

d'où l'on tire l'expression de l'erreur maxima

$$(1) \qquad l = 1,82\sqrt{\frac{2n(N-n)}{N^3}}.$$

Si l'on remplaçait le coefficient 1,82 par 2,3,..., il y aurait 1000 à parier contre 1 que l'erreur commise sur $\frac{n}{N}$ serait moindre que l,....

Voici maintenant les résultats bruts auxquels je suis parvenu : $N = 1444$.

L'erreur.....	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a été observée un nombre de fois...	4	16	26	53	103	247	343	294	208	85	26	22	11	6

Ce que j'appelle erreurs 0, 1, 2,..., dans ce tableau, sont les erreurs qui résulteraient d'une première valeur grossièrement approchée de l'angle mesuré, à l'aide d'un nombre restreint d'observations.

Nous allons nous occuper maintenant de la rectification des nombres fournis par l'expérience. Commençons par diviser tous ces nombres par $N = 1444$, afin d'avoir la probabilité de chaque erreur; poussons le calcul seulement aussi loin que la formule (1) nous engagera à le faire. Ainsi, par exemple, nous trouvons que l'erreur 0 s'est produite 247 fois; la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{247}{1444} \quad \text{à} \quad 1,82\sqrt{\frac{2.247.(1444-247)}{1444^3}} \text{ près,} \quad \text{ou à} \quad 0,02 \text{ près.}$$

Nous pouvons alors dresser le tableau suivant :

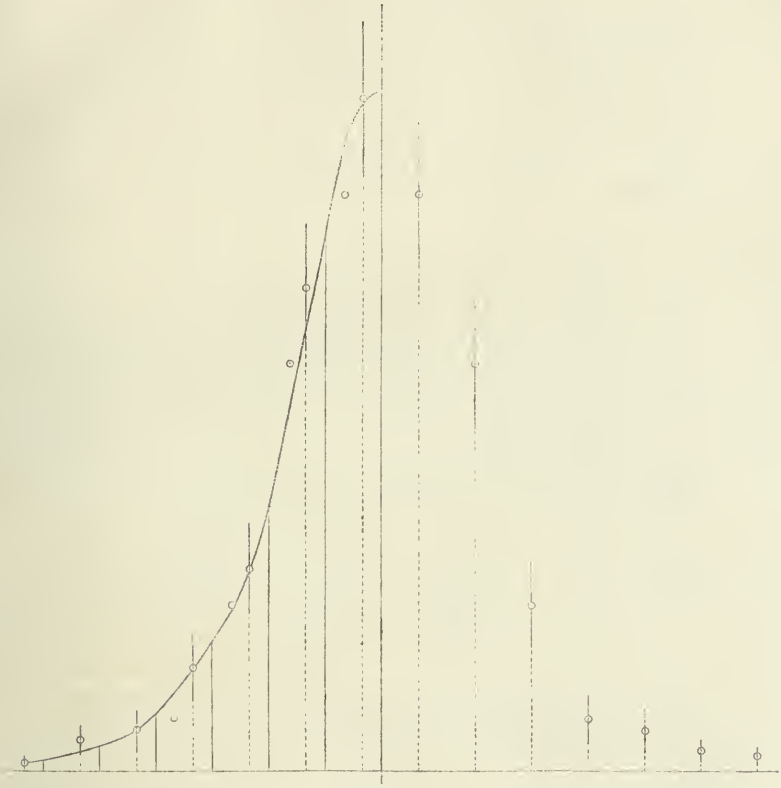
Erreurs.	Probabilités de ces erreurs.	Erreurs de ces probabilités.
−5	0,003	0,003
−4	0,011	0,006
−3	0,018	0,009
−2	0,036	0,012
−1	0,071	0,017
0	0,171	0,025
1	0,238	0,028
2	0,204	0,027
3	0,144	0,023
4	0,059	0,015
5	0,018	0,009
6	0,015	0,008
7	0,008	0,006
8	0,006	0,004

Imaginons que l'on trace deux courbes ayant la même abscisse ε_n, et pour ordonnées $\frac{n}{N} - e_n$ et $\frac{n}{N} + e_n$, e_n désignant l'erreur maxima commise en prenant $\frac{n}{N}$ pour probabilité de l'erreur ε_n. La courbe dont l'ordonnée serait la probabilité vraie de l'erreur ε_n passera entre ces deux-ci.

J'ai cherché à tracer cette courbe le plus régulièrement possible et de telle sorte qu'elle fût symétrique par rapport à l'ordonnée correspondant à l'abscisse 1,33, moyenne des erreurs. Une moitié de cette courbe est représentée sur la figure ci-contre; rectifiant alors les résultats de l'expérience à l'aide de cette courbe, on obtient les résultats consignés dans le tableau suivant (les ordonnées pleines sont les ordonnées rectifiées; les ordonnées ponctuées sont fournies par l'expérience, et la partie pleine correspond, par son origine et son extrémité, aux valeurs $\frac{n}{N} - e_n$ et $\frac{n}{N} + e_n$) :

Erreurs.....	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6
Probabilités.	0,241	0,189	0,090	0,045	0,019	0,008	0,003

Telle est la loi de probabilité qui semble résulter de nos observations, et les résultats qui précèdent, si l'on admet la loi de continuité dans



les erreurs, paraissent exacts, à un ou deux millièmes près. Or, d'après la loi de Gauss, la probabilité de l'erreur ε_n est

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon_n-\frac{1}{2}}^{\varepsilon_n+\frac{1}{2}} e^{-h^2x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{h(\varepsilon_n-\frac{1}{2})}^{h(\varepsilon_n+\frac{1}{2})} e^{-y^2}dy,$$

c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2}\left\{\Theta\left[h\left(\varepsilon_n+\tfrac{1}{2}\right)\right]-\Theta\left[h\left(\varepsilon_n-\tfrac{1}{2}\right)\right]\right\}.$$

Pour $\varepsilon_n = 0$, on a simplement

$$\Theta\left(\frac{h}{2}\right).$$

Si l'on fait $\Theta\left(\frac{h}{2}\right) = 0{,}241$, on trouve

$$\frac{h}{2} = 0{,}217, \quad h = 0{,}434,$$

et par suite

$$\Theta\left(\frac{h}{2}\right) = 0{,}241, \qquad \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{3h}{2}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{h}{2}\right) = 0{,}201,$$

$$\Theta\left(\frac{3h}{2}\right) = 0{,}643, \qquad \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{5h}{2}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{3h}{2}\right) = 0{,}116,$$

$$\Theta\left(\frac{5h}{2}\right) = 0{,}875, \qquad \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{7h}{2}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{5h}{2}\right) = 0{,}046,$$

$$\Theta\left(\frac{7h}{2}\right) = 0{,}968, \qquad \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{9h}{2}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{7h}{2}\right) = 0{,}013,$$

$$\Theta\left(\frac{9h}{2}\right) = 0{,}994.$$

Ainsi les probabilités des erreurs observées seraient :

Erreurs.	Observations.	Gauss.	Différences.
0	0,241	0,241	+ 0,000
± 1	0,189	0,201	+ 0,012
± 2	0,090	0,116	+ 0,026
± 3	0,045	0,046	+ 0,001
± 4	0,019	0,013	— 0,006

Sans doute la dernière colonne n'accuse pas de bien grandes différences, et il est bien clair, pour des raisons que nous avons déjà développées, que la loi de Gauss est une loi approximative; mais la différence 0,026, relative à l'erreur ± 2, paraît assez forte pour que l'on puisse révoquer en doute l'exactitude de la loi de Gauss, et, par suite, pour qu'il soit prudent de rejeter la méthode des moindres carrés quand on n'a qu'un petit nombre d'observations.

Sur de prétendues inadvertances, dans lesquelles Lagrange serait tombé, suivant Poinsot, relativement à deux points fondamentaux de la Mécanique analytique;

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

1. Poinsot a publié, dans le volume de ce Journal pour l'année 1846 [*], une Note intitulée : *Remarque sur un point fondamental de la Mécanique analytique de Lagrange,* Note dont l'objet est d'appeler l'attention sur une inadvertance que l'illustre géomètre aurait commise en affirmant que, dans sa méthode, rien n'oblige à se servir de coordonnées rectangles plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps. (*Mécanique analytique,* 1re édition, p. 23; ou 2e édition, t. I, p. 38.)

Déjà le même auteur, dans un Mémoire *Sur la composition des moments en Mécanique,* lu à l'Académie des Sciences le 17 septembre 1827, avait signalé d'autres inadvertances qu'il croyait voir dans la manière dont les lois de cette composition sont présentées par Lagrange.

Or la vérité est que toutes ces critiques de Poinsot portent à faux. Comme, par suite de la confiance qu'inspirait ce savant, elles ont été introduites à titre de rectifications dans la troisième édition de la *Mécanique analytique,* il pourra n'être pas inutile de montrer ici de quel côté est l'erreur.

2. L'ordre des matières nous conduit à nous occuper d'abord du contenu de la Note de 1846, et de la doctrine qui y est représentée

[*] 1re série, t. XI, p. 261.

comme défectueuse. Pour l'intelligence de ce qui va suivre, il convient de rappeler d'abord quelques-unes de ses parties essentielles.

Dans le problème de l'équilibre d'un système de corps ou points matériels sollicités par des forces P, Q, R,..., Lagrange imagine que, des points auxquels elles sont appliquées, on mène des lignes droites p, q, r,..., respectivement dans les directions de ces forces, et il désigne par dp, dq, dr,... les variations ou différences de ces lignes que produirait un déplacement infiniment petit du système, compatible avec les conditions auxquelles celui-ci doit satisfaire. Ce système sera en équilibre si la relation

$$\mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \ldots = 0$$

est vérifiée, quel que soit le déplacement considéré. C'est là ce que Lagrange appelle l'*équation générale de l'équilibre*.

Il indique la manière d'obtenir les expressions des différentielles dp, dq, dr,.... A cet effet, il rapporte tous les points du système à trois axes fixes ox, oy, oz, perpendiculaires entre eux. La longueur p, par exemple, peut alors être exprimée par la formule

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

x, y, z étant les coordonnées du point auquel la force P est appliquée, et a, b, c celles d'un point quelconque pris sur la direction de cette force. La différentielle dp, dont il s'agit de former l'expression, est évidemment égale à la différence entre deux lignes partant de ce dernier point et aboutissant, l'une, à la position primitive du point d'application de P, et l'autre, au lieu du même point après que ses coordonnées sont devenues, par le déplacement du système, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. On voit que, pour obtenir cette différentielle, il faut faire varier dans la formule ci-dessus x, y, z, en traitant a, b, c comme des constantes. On obtient ainsi

$$dp = \frac{x-a}{p}dx + \frac{y-b}{p}dy + \frac{z-c}{p}dz.$$

Ce point, dont les coordonnées a, b, c figurent dans l'expression ci-dessus de p, est appelé par Lagrange le *centre de tendance* de la

force P. Chaque force extérieure a de même son centre de tendance, que l'on peut placer partout où l'on veut dans la ligne qui marque la direction de cette force. La variation de cette ligne demeure d'ailleurs la même, quelle que soit la position de ce centre. C'est ainsi que, les multiplicateurs de dx, dy, dz dans dp, savoir :

$$\frac{x-a}{p},\quad \frac{y-b}{p},\quad \frac{z-c}{p},$$

étant les cosinus des angles que la ligne p fait respectivement avec les axes ox, oy, oz, la variation de cette ligne est indépendante de sa longueur.

L'introduction de ces centres de tendance est un artifice qui évidemment a pour but de permettre toujours d'obtenir pour chaque force extérieure, telle que P, la différentielle dp qui doit lui être associée dans le terme Pdp de la formule générale de l'équilibre. Lagrange indique plusieurs manières de faire disparaître de cette équation les coordonnées de ces centres, de telle sorte qu'en dernier résultat les données immédiates de chaque question y figurent seules.

Il ajoute :

« Au reste, si nous avons toujours déterminé les lieux des corps par des coordonnées rectangles, c'est que cette manière a l'avantage de la simplicité et de la facilité du calcul; mais ce n'est pas que l'on ne puisse en employer d'autres dans l'usage de la méthode précédente; car il est clair que rien n'oblige dans cette méthode à se servir de coordonnées rectangles, plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps. »

5. C'est dans ces dernières lignes que Poinsot a cru apercevoir une inexactitude. Il lui a semblé que les formules présentées par Lagrange, notamment pour la composition des forces appliquées sur un point, devaient se trouver en défaut dans le cas de coordonnées parallèles à trois axes fixes *obliques* entre eux.

Ces formules ont pour objet de réduire des forces quelconques P, Q, R,..., qui agissent sur un même point suivant des lignes p, q, r,..., à trois autres forces Ξ, Π, Σ, dirigées suivant les lignes ξ, π, σ. Pour résoudre ce problème, « il n'y aura, dit Lagrange, qu'à considérer

l'équilibre des forces P, Q, R,..., et Ξ, Π, Σ, appliquées à ce même point et dirigées respectivement suivant les lignes p, q, r,..., $-\xi$, $-\pi$, $-\sigma$, et former en conséquence l'équation

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots - \Xi d\xi - \Pi d\pi - \Sigma d\sigma = 0,$$

laquelle doit être vraie, de quelque manière qu'on fasse varier la position du point de concours de toutes les forces. Or, quelles que soient les lignes ξ, π, σ, il est clair que, pourvu qu'elles ne soient pas toutes dans un même plan, elles suffisent pour déterminer la position de ce point; par conséquent on pourra toujours exprimer les lignes p, q, r,... par des fonctions de ξ, π, σ, et l'équation précédente devra avoir lieu, par rapport aux variations de chacune de ces trois quantités en particulier; d'où il s'ensuit qu'on aura

$$\Xi = P\frac{dp}{d\xi} + Q\frac{dq}{d\xi} + R\frac{dr}{d\xi} + \ldots,$$

$$\Pi = P\frac{dp}{d\pi} + Q\frac{dq}{d\pi} + R\frac{dr}{d\pi} + \ldots,$$

$$\Sigma = P\frac{dp}{d\sigma} + Q\frac{dq}{d\sigma} + R\frac{dr}{d\sigma} + \ldots \text{ »}$$

(*Mécanique analytique*, 1re édition, p. 62).

Poinsot présente à ce sujet diverses observations, et notamment celles qui suivent :

« Mais il y a, sur ce point de doctrine, une remarque essentielle à faire, et qui paraît avoir échappé à l'auteur de la *Mécanique analytique* : c'est que les formules dont il s'agit ne conviennent point, comme on pourrait le croire, à toute espèce de lignes ou coordonnées ξ, π, σ, bien que ces lignes soient propres à déterminer les lieux des corps,.... Pour l'exactitude de ces formules, il faut que les lignes ξ, π, σ soient de telle nature que leurs différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ expriment les vitesses virtuelles mêmes du point d'application des forces Ξ, Π, Σ, c'est-à-dire que chacune d'elles, $d\xi$, soit la projection *orthogonale* sur la direction de la force Ξ, du déplacement quelconque infiniment petit qu'on suppose donné à ce point dans l'espace... ». (Note de 1846, n° 2.)

Il cherche ensuite à prouver que l'emploi de coordonnées obliques pourrait conduire à des conséquences fausses.

4. Évidemment Poinsot n'avait pas fait attention que l'accomplissement de la condition même qu'il signale comme nécessaire, en supposant que les coordonnées obliques n'y satisfont pas, est, au contraire, toujours assurée, dès que l'on assigne à chaque force, telle que P, un centre de tendance, conformément à ce que prescrit (n° 2) la doctrine de Lagrange.

En effet supposons que le point m, auquel la force P est appliquée suivant la direction mp, soit transporté en n par le déplacement infiniment petit donné à ce point, et que j soit le centre de tendance de cette force P. Nous aurons

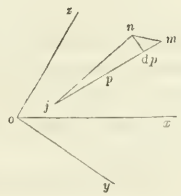
$$\overline{jn}^2 = \overline{jm}^2 + \overline{mn}^2 - 2jm\,mn\cos\widehat{jmn};$$

d'où, par une transformation facile,

$$jm - jn = \frac{2jm}{jm + jn}\,mn\cos\widehat{jmn} - \frac{\overline{mn}^2}{jm + jn}.$$

Le point j pouvant être placé partout où l'on voudra sur la ligne p (n° 2), il est permis de traiter le déplacement mn comme infiniment

Fig. 1.



petit par rapport à jn, et $jm + jn$ comme différant infiniment peu de $2jm$. On aura donc, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$jm - jn = mn\cos\widehat{jmn}.$$

Par conséquent $jm - jn$ ou dp est bien la projection orthogonale du déplacement infiniment petit mn sur la direction p de la force P. Cette conclusion subsiste, quelle que soit la nature des coordonnées qu'on aura choisies pour déterminer les lieux des corps.

Si ce sont des coordonnées obliques, parallèles à trois axes fixes ox, oy, oz, au lieu d'avoir, comme dans le cas des coordonnées rectangles (n° 2),

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

on aura, en désignant toujours par a, b, c les coordonnées du centre de tendance de P,

$$p = \sqrt{\begin{array}{l}(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\widehat{xy} \\ \quad + (y-b)(z-c)\cos\widehat{yz} + (z-c)(x-a)\cos\widehat{zx},\end{array}}$$

et il viendra

$$\begin{aligned} dp = & \frac{x - a + (y-b)\cos\widehat{xy} + (z-c)\cos\widehat{zx}}{p}\,dx \\ & + \frac{y - b + (z-c)\cos\widehat{yz} + (x-a)\cos\widehat{xy}}{p}\,dy \\ & + \frac{z - c + (x-a)\cos\widehat{zx} + (y-b)\cos\widehat{yz}}{p}\,dz. \end{aligned}$$

5. Afin de fixer les idées sur la manière d'appliquer cette méthode analytique, je vais traiter le cas très-simple où il s'agit de décomposer une force P agissant sur un point m suivant une ligne donnée p, en trois autres forces Ξ, Π, Σ, agissant sur le même point suivant trois lignes ξ, π, σ également données.

La formule générale de l'équilibre se réduit alors à

$$\mathrm{P}\,dp - \Xi\,d\xi - \Pi\,d\pi - \Sigma\,d\sigma = 0,$$

et elle donne (n° 3)

$$\Xi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\xi}, \quad \Pi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\pi}, \quad \Sigma = \mathrm{P}\frac{dp}{d\sigma}.$$

Supposons d'abord que tout le système soit rapporté à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, comme Lagrange le recommande en vue de la simplicité et de la facilité du calcul. Nommons x, y, z les coordonnées du point m; a, b, c celles du centre ou point de tendance de la force P, et α, β, γ; ε, ζ, η; λ, μ, ν les coordonnées analogues pour les forces Ξ, Π, Σ. On aura

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$
$$\xi = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$
$$\pi = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-\eta)^2},$$
$$\sigma = \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2}.$$

Nous devons regarder x, y, z et p comme des fonctions de ξ, π, σ. Pour déterminer la valeur de $\frac{dp}{d\xi}$, il faut différentier ces quatre équations en ne faisant varier que ξ. On obtient ainsi

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{(x-a)}{p}\frac{dx}{d\xi} + \frac{(y-b)}{p}\frac{dy}{d\xi} + \frac{(z-c)}{p}\frac{dz}{d\xi},$$
$$1 = \frac{(x-\alpha)}{\xi}\frac{dx}{d\xi} + \frac{(y-\beta)}{\xi}\frac{dy}{d\xi} + \frac{(z-\gamma)}{\xi}\frac{dz}{d\xi},$$
$$0 = \frac{(x-\varepsilon)}{\pi}\frac{dx}{d\xi} + \frac{(y-\zeta)}{\pi}\frac{dy}{d\xi} + \frac{(z-\eta)}{\pi}\frac{dz}{d\xi},$$
$$0 = \frac{(x-\lambda)}{\sigma}\frac{dx}{d\xi} + \frac{(y-\mu)}{\sigma}\frac{dy}{d\xi} + \frac{(z-\nu)}{\sigma}\frac{dz}{d\xi}.$$

Soit ds le déplacement du point m qui résulte de cette variation $d\xi$. Multiplions tous les termes de ces nouvelles équations par $\frac{d\xi}{ds}$, et remarquons ensuite que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$; $\frac{x-\alpha}{\xi}$, ... sont les cosinus des angles que les lignes ds, p, ξ, π et σ font avec les axes ox, oy, oz. D'après cela, les deux dernières équations signifient que ds est perpendiculaire à chacune des lignes π et σ, et que, par conséquent, la ligne ms, qui marque la direction de ce déplacement, est la perpendiculaire au plan $\pi m \sigma$ menée par le point m; les deux

autres, que dp et $d\xi$ sont les projections orthogonales de ds respectivement sur les lignes p et ξ. Il est donc permis d'écrire $dp = ds \cos\widehat{smp}$, $d\xi = ds \cos\widehat{sm\xi}$, d'où

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{\cos\widehat{smp}}{\cos\widehat{sm\xi}} \quad \text{et} \quad \Xi = \frac{\mathrm{P}\cos\widehat{smp}}{\cos\widehat{sm\xi}}.$$

Pour construire cette composante Ξ, on portera sur la ligne p, à partir du point m, une longueur proportionnelle à P, et l'on mènera, par le point ainsi déterminé, un plan parallèle à celui des droites π, σ. La longueur $m\xi$ interceptée par ce plan sur la ligne ξ représentera en grandeur la composante Ξ; car la longueur interceptée sur la droite ms par ce plan, perpendiculaire à sa direction, sera égale à $\mathrm{P}\cos\widehat{smp}$ et à $m\xi \cos\widehat{sm\xi}$. On aura donc

$$m\xi = \frac{\mathrm{P}\cos\widehat{smp}}{\cos\widehat{sm\xi}} = \Xi.$$

Cette construction est précisément celle qui est donnée dans les *Éléments de Statique*.

En faisant varier π, et ensuite σ, dans les expressions ci-dessus de p, ξ, π, σ, on formera deux nouveaux groupes de quatre équations, qui conduiront de même à la construction des composantes Π et Σ.

Nous devons reconnaître, toutefois, qu'au lieu d'interpréter géométriquement les équations composant chacun de ces groupes, il eût été plus conforme à l'esprit de la *Mécanique analytique* de tirer, des trois dernières équations du premier, par exemple, les valeurs de $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\xi}$, $\frac{dz}{d\xi}$, et d'en conclure celle de $\frac{dp}{d\xi}$. Je laisse au lecteur le soin d'effectuer ces calculs.

6. Supposons maintenant que les axes ox, oy, oz soient obliques entre eux. Afin de ne pas nous jeter dans de trop grandes complications admettons, qu'on les ait choisis parallèles aux lignes ξ, π, σ et

conservons les notations précédentes. Nous aurons (n° 4)

$$p = \sqrt{\begin{array}{c}(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\widehat{xy} \\ + 2(y-b)(z-c)\cos\widehat{yz} + 2(z-c)(x-a)\cos\widehat{zx}.\end{array}}$$

Par la variation de ξ, le point m aura un déplacement ds, lequel sera la diagonale d'un rhomboïde ayant pour arêtes parallèles aux axes dx, dy, dz. La projection orthogonale de ce déplacement sur la ligne ξ sera $d\xi$; elle se réduira à zéro sur chacune des lignes π et σ, qui demeurent constantes pendant qu'on fait varier ξ. De là ces trois relations

$$\begin{aligned} d\xi &= dx + dy\cos\widehat{xy} + dz\cos\widehat{zx}, \\ 0 &= dy + dz\cos\widehat{yz} + dx\cos\widehat{xy}, \\ 0 &= dz + dx\cos\widehat{zx} + dy\cos\widehat{yz}; \end{aligned}$$

d'autre part on a, d'après l'expression de dp (n° 4),

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\xi} = {} & \frac{x-a+(y-b)\cos\widehat{xy}+(z-c)\cos\widehat{zx}}{p}\,\frac{dx}{d\xi} \\ & + \frac{y-b+(z-c)\cos\widehat{yz}+(x-a)\cos\widehat{xy}}{p}\,\frac{dy}{d\xi} \\ & + \frac{z-c+(x-a)\cos\widehat{zx}+(y-b)\cos\widehat{yz}}{p}\,\frac{dz}{d\xi}; \end{aligned}$$

ce que nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\xi} = {} & \frac{x-a}{p}\left(\frac{dx}{d\xi} + \frac{dy}{d\xi}\cos\widehat{xy} + \frac{dz}{d\xi}\cos\widehat{zx}\right) \\ & + \frac{y-b}{p}\left(\frac{dy}{d\xi} + \frac{dz}{d\xi}\cos\widehat{yz} + \frac{dx}{d\xi}\cos\widehat{xy}\right) \\ & + \frac{z-c}{p}\left(\frac{dz}{d\xi} + \frac{dx}{d\xi}\cos\widehat{zx} + \frac{dy}{d\xi}\cos\widehat{yz}\right). \end{aligned}$$

En ayant égard, dans cette dernière expression de $\frac{dp}{d\xi}$, aux trois rela-

tions ci-dessus, et en procédant d'une manière analogue pour obtenir $\frac{dp}{d\pi}$ et $\frac{dp}{d\sigma}$, il vient

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{x-a}{p}, \quad \frac{dp}{d\pi} = \frac{y-b}{p}, \quad \frac{dp}{d\sigma} = \frac{z-c}{p};$$

on a, par conséquent,

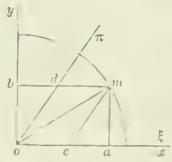
$$\Xi = \frac{P(x-a)}{p}, \quad \Pi = \frac{P(y-b)}{p}, \quad \Sigma = \frac{P(z-c)}{p},$$

ce qui nous ramène à la construction connue.

7. Considérons actuellement, avec Poinsot (Note de 1846, n° 5), un point m assujetti à demeurer sur la circonférence d'un cercle fixe. Si l'on nomme x et y les coordonnées de ce point par rapport à deux axes rectangulaires menés par le centre, deux forces X, Y, respectivement parallèles à ces axes, et telles que l'on ait $X : Y :: x : y$, donneront une résultante perpendiculaire à la circonférence du cercle, et tiendront ainsi le point m en équilibre sur cette ligne.

Cela posé, si nous prenons, au lieu des coordonnées rectangles x et y, deux autres coordonnées ξ et π de même origine, par exemple, l'une, ξ, suivant les x, l'autre, π, formant un angle α avec la première, le point m sera pareillement tenu en équilibre par deux nouvelles forces Ξ et Π telles, que l'on ait $\Xi : \Pi :: \xi : \pi$.

Fig. 2.



En effet, dans la figure ci-dessus, les deux parallélogrammes *oamb*, *ocmd*, construits respectivement sur les lignes x, y d'une part et ξ, π

de l'autre, ont pour diagonale commune le rayon om, lequel se trouve ainsi représenter en grandeur, comme en direction, la résultante de chacun de ces deux systèmes de forces.

Par conséquent, si l'on réduit par les formules de Lagrange les forces X et Y, qui agissent sur le point m suivant les lignes x, y, à deux autres forces Ξ et Π, agissant sur le même point suivant les lignes ξ, π, ces nouvelles forces devront se trouver proportionnelles aux coordonnées ξ, π.

Or ces formules donnent, pour ce cas,

$$\Xi = X\frac{dx}{d\xi} + Y\frac{dy}{d\xi}, \quad \Pi = X\frac{dz}{d\pi} + Y\frac{dy}{d\pi}.$$

Comme on a

$$x = \xi + \pi\cos\alpha, \quad y = \pi\sin\alpha,$$

Poinsot tire de ces deux relations

$$\frac{dx}{d\xi} = 1, \quad \frac{dy}{d\xi} = 0, \quad \frac{dx}{d\pi} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{d\pi} = \sin\alpha;$$

d'où

$$\Xi = X, \quad \Pi = X\cos\alpha + Y\sin\alpha = X\left(\cos\alpha + \frac{y}{x}\sin\alpha\right),$$

puisque l'on a $X : Y :: x : y$. Remplaçant x et y par leurs valeurs ci-dessus en fonction des nouvelles coordonnées, il vient

$$\Pi = X\frac{\pi + \xi\cos\alpha}{\xi + \pi\cos\alpha},$$

ce qui donne $\Xi : \Pi :: \xi + \pi\cos\alpha : \pi + \xi\cos\alpha$. Il faudrait donc que l'on eût également $\xi + \pi\cos\alpha : \pi + \xi\cos\alpha :: \xi : \pi$, ou $(\xi^2 - \pi^2)\cos\alpha = 0$, condition à laquelle on ne peut satisfaire pour tous les points de la circonférence qu'en posant $\cos\alpha = 0$, c'est-à-dire en prenant la ligne π perpendiculaire à ξ.

Suivant Poinsot, c'est là une preuve que la méthode exposée dans l'Ouvrage de Lagrange est en défaut lorsqu'on se sert de coordonnées obliques.

8. Appliquons cette méthode correctement : nous obtiendrons un tout autre résultat. Il faut remarquer d'abord que les formules de Lagrange, invoquées par Poinsot, supposent essentiellement (n° 3) que ξ et π sont deux variables indépendantes, et que, par conséquent, il n'y a pas lieu ici d'avoir égard à la relation entre ces deux coordonnées, nécessaire pour que le point m soit assujetti à se trouver sur la circonférence du cercle. La considération de cette circonférence n'a servi, dans la présente question, qu'à former *a priori* ces deux systèmes X, Y et Ξ, Π, que nous savons pouvoir être substitués l'un à l'autre. Et il ne s'agit plus que de faire voir comment le second se déduit du premier par les formules citées.

Supposons, comme du reste Lagrange le fait habituellement, que toutes ces forces tendent à diminuer les coordonnées du point m, auquel elles sont appliquées, et faisons varier d'abord ξ (n°s 2 et 4), la ligne π demeurant constante. Il résultera de cette variation $d\xi$ un déplacement ds du point m, sur la perpendiculaire à la ligne π menée par ce point, et nous aurons

$$d\xi = ds \sin\alpha, \quad dx = d\xi, \quad dy = -ds\cos\alpha.$$

Je mets le signe — à la variation dy, parce qu'elle est contraire au sens d'action que nous attribuons à Y. D'après cela, il vient

$$\Xi = X - Y\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Faisons ensuite varier π, la ligne ξ demeurant à son tour constante. Le nouveau déplacement ds du point m, résultant de cette variation $d\pi$, aura lieu dans la ligne y, perpendiculaire à ξ. Nous aurons

$$d\pi = ds\sin\alpha, \quad dx = 0, \quad dy = ds,$$

et, par suite,

$$\Pi = \frac{Y}{\sin\alpha}.$$

Ces résultats sont conformes à ceux qu'on obtient par l'application

des règles connues de la *Statique*. Ils satisfont d'ailleurs à la condition $\Xi : \Pi :: \xi : \pi$, qu'on s'était imposée tout d'abord (n° 7).

9. Poinsot considère, plus généralement (Note de 1846, n°s 3 et 4), un point m sollicité par des forces P, Q, R,..., en nombre quelconque, dirigées vers autant de centres fixes o, o', o'',..., et la surface représentée par l'équation

$$f(p, q, r, \ldots) = \text{const.},$$

$f(p, q, r, \ldots)$ désignant une fonction quelconque des rayons vecteurs $p, q, r, \ldots$, menés de ce point m à tous ces centres. D'après un théorème qu'il a démontré dans son Mémoire intitulé : *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes*, si les forces P, Q, R,... sont respectivement proportionnelles aux dérivées $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$,... de cette fonction, prises successivement par rapport à ces variables p, q, r,..., leur résultante sera perpendiculaire à la surface. Supposons que l'on veuille réduire toutes ces forces à trois autres Ξ, Π, Σ, dirigées suivant trois lignes $m\xi$, $m\pi$, $m\sigma$, obliques entre elles et non comprises dans un même plan. On pourra regarder p, q, r,... comme des fonctions de ces nouvelles lignes ξ, π, σ, de telle sorte que, en différentiant à ce point de vue, on aura, d'après l'hypothèse ci-dessus,

$$f'(p)\frac{dp}{d\xi} + f'(q)\frac{dq}{d\xi} + f'(r)\frac{dr}{d\xi} + \ldots = \Xi,$$

$$f'(p)\frac{dp}{d\pi} + f'(q)\frac{dq}{d\pi} + f'(r)\frac{dr}{d\pi} + \ldots = \Pi,$$

$$f'(p)\frac{dp}{d\sigma} + f'(q)\frac{dq}{d\sigma} + f'(r)\frac{dr}{d\sigma} + \ldots = \Sigma.$$

Or il semble à Poinsot, par des raisons qu'il me paraît inutile de rapporter, que cela n'est pas exact.

Ici, de même que dans l'exemple précédent, nous ferons abstraction de la surface considérée, et nous n'entreprendrons de démontrer que l'équivalence des deux systèmes P, Q, R,... et Ξ, Π, Σ; car les formules mises en suspicion par Poinsot sont uniquement relatives à

cette équivalence, et elles sont établies dans la supposition que le déplacement virtuel du point m peut avoir lieu non pas seulement dans une surface, mais aussi dans toutes les directions autour de ce point.

Rapportons tout le système à trois axes ox, oy, oz parallèles aux lignes ξ, π, σ (n° 6). Appelons a, b, c les coordonnées du point o; a', b', c' celles du point o'; a'', b'', c'' celles du point o'',..., et x, y, z celles du point m. Nous aurons

$$p = \sqrt{\begin{aligned}&(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\widehat{xy}\\ &\quad + 2(y-b)(z-c)\cos\widehat{yz} + 2(z-c)(x-a)\cos\widehat{zx},\end{aligned}}$$

$$q = \sqrt{\begin{aligned}&(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 + 2(x-a')(y-b')\cos\widehat{xy}\\ &\quad + 2(y-b')(z-c')\cos\widehat{yz} + 2(z-c')(x-a')\cos\widehat{zx},\end{aligned}}$$

$$r = \sqrt{\begin{aligned}&(x-a'')^2 + (y-b'')^2 + (z-c'')^2 + 2(x-a'')(y-b'')\cos\widehat{xy}\\ &\quad + 2(y-b'')(z-c'')\cos\widehat{yz} + 2(z-c'')(x-a'')\cos\widehat{zx},\end{aligned}}$$

....;

d'où (n° 6)

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{x-a}{p}, \quad \frac{dp}{d\pi} = \frac{y-b}{p}, \quad \frac{dp}{d\sigma} = \frac{z-c}{p}, \quad \frac{dq}{d\xi} = \frac{x-a'}{q}, \ldots,$$

et, par suite,

$$f'(p)\frac{x-a}{p} + f'(q)\frac{x-a'}{q} + f'(r)\frac{x-a''}{r} + \ldots = \Xi,$$

$$f'(p)\frac{y-b}{p} + f'(q)\frac{y-b'}{q} + f'(r)\frac{y-b''}{r} + \ldots = \Pi,$$

$$f'(p)\frac{z-c}{p} + f'(q)\frac{z-c'}{q} + f'(r)\frac{z-c''}{r} + \ldots = \Xi.$$

On voit que Ξ n'est autre chose que la somme des composantes des

forces P, Q, R, ..., suivant la ligne ξ; que, de même, Π et Σ sont pareillement les sommes des composantes des mêmes forces suivant les lignes π et σ.

Du reste, il est facile de vérifier *a posteriori* l'équivalence de ces deux systèmes de forces; car soit ds un déplacement donné au point m dans une direction quelconque; représentons par $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ ses projections orthogonales et par dx, dy, dz ses projections obliques sur les lignes ξ, π, σ; nous aurons

$$d\xi = dx + dy \cos\widehat{xy} + dz \cos\widehat{zx},$$

$$d\pi = dy + dz \cos\widehat{yz} + dx \cos\widehat{xy},$$

$$d\sigma = dz + dx \cos\widehat{zx} + dy \cos\widehat{yz}.$$

Multiplions les premiers membres de ces trois égalités respectivement par Ξ, Π, Σ, et les seconds membres par les expressions que nous venons d'obtenir pour ces trois composantes. Il viendra, en ajoutant,

$$\Xi\, d\xi + \Pi\, d\pi + \Sigma\, d\sigma = f'(p)\,dp + f'(q)\,dq + f'(r)\,dr + \ldots,$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence des deux systèmes.

On voit que Poinsot s'est trompé en croyant démontrer que les formules de Lagrange ne sont pas toujours bonnes, et qu'elles se trouvent en défaut notamment dans le cas d'axes obliques.

10. Il nous reste à parler des critiques de Poinsot relatives à la manière dont la composition des moments est présentée dans la *Mécanique analytique*. On sait que les lois de cette composition n'étaient pas encore connues en 1788, c'est-à-dire à l'époque où la première édition de cet Ouvrage, si justement célèbre, fut publiée. Elles furent trouvées, peu de temps après, par Euler et Laplace [*]; Lagrange les

---

[*] *Bulletin universel des Sciences, publié sous la direction du baron de Férussac*, 1re section, t. VII, 1827, p. 357.

introduisit dans le tome I de la seconde édition, publié en 1811. Elles s'offraient naturellement comme une conséquence très-simple du principe des vitesses virtuelles et de celui de la composition des rotations autour d'axes concourants, donné dans la première édition (1re Partie, 3e Section). En vertu de ce dernier principe, trois rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, autour de trois axes rectangulaires *ol*, *om*, *on*, se composent en une seule $d\theta = \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}$, autour d'un axe *oh*, faisant avec *ol*, *om*, *on* trois angles λ, μ, ν, donnés par les équations

$$d\psi = d\theta \cos\lambda, \quad d\omega = d\theta \cos\mu, \quad d\varphi = d\theta \cos\nu.$$

Chacune de ces rotations, telle que $d\psi$, donne lieu à un déplacement $d\psi$ pour tout point situé à une distance de l'axe correspondant *ol* égale à l'unité de longueur. Dès lors on peut concevoir qu'une force L soit appliquée à l'un de ces points, perpendiculairement au plan passant par ce point et par l'axe *ol*, et que d'autres forces M, N, H, relatives aux axes *om*, *on*, *oh*, soient pareillement appliquées au système. Les rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, $d\theta$ étant compatibles avec les conditions auxquelles ce système doit satisfaire, il sera en équilibre si les grandeurs de ces forces sont telles que l'on ait

$$L d\psi + M d\omega + N d\varphi = H d\theta.$$

Or, si nous mettons à la place de $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ leurs valeurs ci-dessus, il vient

$$(L \cos\lambda + M \cos\mu + N \cos\nu - H)\, d\theta = 0.$$

Comme $d\theta$ est arbitraire, il faut que l'on ait

$$L \cos\lambda + M \cos\mu + N \cos\nu - H = 0,$$

équation à laquelle on satisfera évidemment en posant

$$L = H \cos\lambda, \quad M = H \cos\mu, \quad N = H \cos\nu,$$

ce qui donne les lois connues de la composition des moments. Telle est, du moins pour le fond, la manière dont Lagrange y parvient.

11. « Mais cette démonstration, dit Poinsot, outre l'inconvénient qu'elle a de supposer la connaissance de l'effet dynamique du moment et de n'être pas tirée du seul principe de l'équilibre, présente encore un autre défaut qu'on n'a point remarqué : c'est qu'elle suppose que les trois moments composants autour de trois axes rectangulaires soient proportionnels aux trois rotations instantanées qu'ils tendent à produire autour des mêmes axes, ce qui n'a pas lieu en général; car les rotations que des moments, ou plutôt des couples, tendent à produire sur un corps, ne se font point autour des axes de ces couples, et ne sont point proportionnels à leurs moments, etc. [*]. »

Il en est de ces critiques comme de celles de la Note de 1846 : pas une qui porte juste; car c'est bien du seul principe de l'équilibre que la démonstration ci-dessus est tirée, et elle ne suppose en aucune façon la connaissance de l'effet dynamique du moment. Les déplacements que l'on y considère sont purement virtuels [**] et, par conséquent, indépendants des forces appliquées. Ce qu'objecte Poinsot relativement aux grandeurs des rotations instantanées des corps et aux axes autour desquels ces rotations ont lieu prouve qu'il a confondu les rotations *virtuelles,* qui sont essentiellement censées produites sans l'intervention des forces, avec les rotations *spontanées,* qui naissent d'impulsions imprimées aux corps.

12. Dans ce qui précède, je me suis attaché uniquement aux deux points de doctrine sur lesquels Poinsot avait cru devoir appeler d'une manière expresse l'attention des géomètres. Cependant il y aurait aussi plus d'une remarque à faire sur le contenu d'une partie des annotations qui ont été jointes à la troisième édition de la *Mécanique analytique;* mais, pour remplir convenablement cet objet, il faudrait dépasser de beaucoup les limites que comporte le présent article. Du reste, c'est là un travail de révision que l'on peut ajourner sans inconvénient.

---

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. VII, p. 564.

[**] « Le mot *virtuel* indique que le mouvement attribué au système est seulement possible, mais il n'a pas réellement lieu, et l'on n'a pas à considérer les forces qui seraient capables d'opérer ce mouvement. » (STURM, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique,* n° 459.)

En effet, la *Mécanique analytique* devant être comprise dans l'édition officielle des *OEuvres de Lagrange,* dont la publication se poursuit, depuis plusieurs années, par les soins de M. Serret, il est permis de penser que l'éminent géomètre sera nécessairement conduit à faire ce travail, et l'on peut être assuré d'avance que les commentaires, qu'il jugera ensuite indispensable de conserver ou d'introduire, ne laisseront rien à désirer.

Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique;

PAR M. LAGUERRE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATION MIXTE DE LA POLAIRE D'UNE DROITE.

1. Dans ce Mémoire, je rapporterai les figures que j'aurai à considérer à un triangle de référence dont les côtés auront respectivement pour équations

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = 0.$$

Dans le but de simplifier le langage (ce qui ne diminue en rien la généralité des résultats obtenus), je supposerai que la droite $z = 0$ coïncide avec la droite de l'infini, en sorte que je supposerai toujours z égal à l'unité, ainsi que toutes les variables analogues z', ζ, ζ', ... que j'aurai occasion d'introduire; je les mettrai néanmoins en évidence toutes les fois que cela sera nécessaire pour la clarté ou la simplicité des formules.

Cela posé, $ux + vy + wz = 0$ désignant l'équation d'une droite mobile et $F(u, v, w)$ une forme ternaire, homogène et du degré n, si les paramètres u, v et w sont liés entre eux par la relation

$$(1) \qquad F(u, v, w) = 0,$$

la droite enveloppe une courbe de $n^{ième}$ classe K, dont l'équation (1) est l'équation tangentielle.

Soit (x, y) un point quelconque du plan et $\frac{\mu}{\lambda}$ le coefficient angu-

laire d'une quelconque des tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe K; cette tangente, en désignant par X, Y, Z les coordonnées courantes, a pour équation

$$\mu(X - x) - \lambda(Y - y) = 0,$$

ou encore

$$\mu X - \lambda Y + \lambda y - \mu x = 0;$$

on en déduit la relation

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = 0,$$

qui a pour racines les coefficients angulaires des n tangentes, que l'on peut mener du point donné à la courbe.

Si l'on pose

$$(2) \qquad F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = U(\lambda, \mu),$$

U est une forme binaire du degré n par rapport aux variables λ et μ, dont les coefficients sont des polynômes du degré n en x et y; cette forme satisfait d'ailleurs évidemment à l'équation aux différences partielles

$$\lambda \frac{dU}{dx} + \mu \frac{dU}{dy} = 0.$$

Je dirai que l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ est l'*équation mixte* de la courbe K. J'ai déjà développé quelques-unes des conséquences les plus immédiates que l'on peut tirer de cette notion dans un Mémoire publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* [*], et je rappellerai à ce sujet la proposition suivante, dont je ferai un usage continuel :

Soit un nombre quelconque de courbes représentées par les équations mixtes

$$f_0(\lambda, \mu) = 0, \quad f_1(\lambda, \mu) = 0, \quad f_2(\lambda, \mu) = 0, \ldots;$$

si l'on considère un invariant quelconque I *des formes* $f_0, f_1, f_2, \ldots,$

[*] *Mémoire de Géométrie analytique*, 2e série, t. XVII; 1872.

l'équation $I = 0$ *représente une courbe dont le degré est égal au poids de l'invariant.*

Il est utile ici de remarquer que, si I était un polynôme de degré inférieur au poids de l'invariant, relativement aux variables x et y, on devrait, en rendant le polynôme homogène, introduire comme facteur une certaine puissance de z, en sorte que la courbe $I = 0$ contiendrait un certain nombre de fois la droite de l'infini.

2. Le problème principal, que l'on doit résoudre pour employer utilement les équations mixtes dans les questions de Géométrie analytique, est le suivant :

Étant donnée une courbe K *ayant pour équation tangentielle* $F(u, v, w) = 0$ *et pour équation mixte* $U(\lambda, \mu) = 0$, *déduire de cette équation mixte, de ses invariants et des contrevariants de la forme* F, *les équations mixtes des courbes dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les divers covariants de* F.

Et tout d'abord je m'occuperai, tant à cause de leur simplicité qu'à cause de leur importance, des covariants doubles qui représentent les polaires des divers ordres des droites du plan par rapport à K.

3. Dans tout ce qui suit, en désignant par Z une fonction homogène quelconque, du degré n, des variables λ et μ, je représenterai, selon l'usage habituel, par Z_1 et Z_2 les quantités $\frac{1}{n}\frac{dZ}{d\lambda}$ et $\frac{1}{n}\frac{dZ}{d\mu}$, et de même par Z_{11}, Z_{12}, Z_{22} les quantités $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda^2}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda\, d\mu}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\mu^2}$.

D'une façon analogue, je représenterai par F_1, F_2 et F_3 le résultat que l'on obtient en remplaçant dans $\frac{1}{n}\frac{dF}{du}$, $\frac{1}{n}\frac{dF}{dv}$, $\frac{1}{n}\frac{dF}{dw}$ les variables u, v et w par μ, $-\lambda$ et $\lambda y - \mu x$.

F_{11}, F_{12}, ... représenteront de même le résultat que l'on obtient en faisant la même substitution dans $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2F}{du^2}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2F}{du\, dv}$, ...

Cela posé, étant donnée une droite ayant pour équation

$$\omega = ux + vy + wz = 0,$$

l'équation mixte de sa première polaire est

$$uF_1 + vF_2 + wF_3 = 0.$$

En différentiant successivement par rapport à λ, μ, x et y la relation (2), on obtient les relations suivantes :

$$(3) \qquad U_1 = -F_2 + yF_3, \quad U_2 = F_1 - xF_3,$$

$$(4) \qquad F_3 = -\frac{1}{n\mu}\frac{dU}{dx} = \frac{1}{n\lambda}\frac{dU}{dy};$$

par suite, en désignant par $\Pi_\omega = 0$ l'équation de la polaire [*] de la droite $\omega = 0$, on a

$$\Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega F_3.$$

La polaire de la droite de l'infini a évidemment pour équation $F_3 = 0$; en posant

$$(4)' \qquad F_3 = \Pi,$$

on a donc

$$(5) \qquad \Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega\Pi.$$

4. Posons

$$U = (a, b, c, \ldots \lambda, \mu)^n$$

et

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu)^{n-1},$$

la comparaison des formules (4) et (4)' donne immédiatement les relations suivantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dy} = n\alpha, & \dfrac{db}{dy} = (n-1)\beta, & \dfrac{dc}{dy} = (n-2)\gamma, \ldots, \\ \dfrac{da}{dx} = 0, & \dfrac{db}{dx} = -\alpha, & \dfrac{dc}{dx} = -2\beta, \ldots, \end{cases}$$

qui permettent d'exprimer les fonctions α, β, γ,... au moyen des dérivées partielles des coefficients de U; mais, comme je le montrerai

[*] Ici, comme dans toute la suite de ce Mémoire, je désigne simplement sous le nom de *polaire* de la droite sa *première* polaire, qui est de la $(n-1)^{ième}$ classe.

dans la suite de ce Mémoire, elles nous seront surtout utiles pour exprimer ces dérivées en fonction des coefficients de Π.

5. Soit une courbe K′ de classe n' et ayant pour équation mixte $V(\lambda, \mu) = 0$; étant menée une tangente à cette courbe, proposons-nous de trouver le lieu des points M où elle est coupée par sa polaire.

En désignant par $\omega = 0$ l'équation d'une de ces tangentes, je remarque d'abord qu'en désignant par λ' et μ' les coordonnées courantes l'équation mixte de sa polaire est, en vertu de l'équation (5),

$$uU_2(\lambda', \mu') - vU_1(\lambda', \mu') + \omega\Pi(\lambda', \mu') = 0;$$

son équation en coordonnées cartésiennes est le discriminant (par rapport à λ' et μ') de l'équation précédente. Le point M, satisfaisant à l'équation $\omega = 0$, satisfera donc à l'équation $\Delta = 0$, Δ désignant le discriminant du polynôme $uU_2(\lambda', \mu') - vU_1(\lambda', \mu')$.

Le coefficient angulaire de la tangente est d'ailleurs $\frac{u}{-v} = \frac{\mu}{\lambda}$; l'équation du lieu cherché s'obtiendra donc en éliminant λ et μ entre l'équation $V(\lambda, \mu) = 0$ et l'équation $\Delta = 0$, les variables u et v ayant été préalablement remplacées par μ et $-\lambda$ dans le polynôme Δ.

D'où la proposition suivante :

Théorème I. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et* $V(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes de deux courbes* K *et* K′, *on obtiendra l'équation du lieu des points où les tangentes à* K′ *sont coupées par leurs polaires relativement à* K, *en éliminant* λ *et* μ *entre l'équation* $V(\lambda, \mu) = 0$ *et l'équation* $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, Δ *désignant le discriminant pris par rapport à* λ' *et* μ' *du polynôme* $\lambda \frac{dU}{d\lambda'} + \mu \frac{dU}{d\mu'}$.

Il est clair que les considérations précédentes s'appliquent également aux polaires des divers ordres relativement à la courbe K; on peut donc énoncer cette proposition plus générale :

Théorème II. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et* $V(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes des deux courbes* K *et* K′, *on obtiendra l'équation du lieu des points où les tangentes à* K′ *sont coupées par leurs* $m^{\text{ièmes}}$ *polaires relativement à* K, *en éliminant* λ *et* μ *entre l'équation* $V(\lambda, \mu) = 0$ *et l'équation* $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, Δ *désignant le discriminant pris par rapport*

à λ' et μ' de l'émanant

$$\left(\lambda \frac{d}{d\lambda'} + \mu \frac{d}{d\mu'}\right)^m \mathrm{U}.$$

6. Soit, pour faire une application simple du théorème précédent, une courbe de quatrième classe K^4, dont l'équation mixte soit

$$\mathrm{U} = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)^4 = 0.$$

En considérant la première polaire, on voit que Δ est le discriminant du polynôme $(a\lambda + b\mu)\lambda'^3 + 3(b\lambda + c\mu)\lambda'^2\mu' + \ldots$, discriminant qui est de la forme $p\mathrm{TU} + q\mathrm{SH}$, en désignant par H le hessien de U, et par T et S son invariant cubique et son invariant quadratique.

Par suite, l'équation du lieu des points où les tangentes à K^4 rencontrent leurs polaires s'obtient en égalant à zéro le résultant de U et de $p\mathrm{TU} + q\mathrm{SH}$, c'est-à-dire $(\mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2)^2\mathrm{S}^4$.

On sait d'ailleurs que $\mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2 = 0$ est l'équation de K^4 en coordonnées cartésiennes et que $\mathrm{S} = 0$ est l'équation de la courbe du quatrième ordre S, qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de K^4; de là la proposition suivante :

Théorème III. — *Étant donnée une courbe de quatrième classe* K^4, *une quelconque de ses tangentes est coupée par sa polaire en six points, dont deux sont confondus au point de contact; les quatre autres points d'intersection décrivent, lorsque la tangente se déplace, la courbe de quatrième ordre* S, *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K^4.

Réciproquement, si, par un point M *de* S, *on mène les quatre tangentes à* K^4, *leurs polaires relativement à cette courbe passent par* M.

7. L'application la plus importante du théorème II est relative au cas de la polaire conique; Δ est alors le discriminant de

$$\lambda'^2 \frac{d^2\mathrm{U}}{d\lambda^2} + 2\lambda'\mu' \frac{d^2\mathrm{U}}{d\lambda\, d\mu} + \mu'^2 \frac{d^2\mathrm{U}}{d\mu^2},$$

c'est-à-dire le hessien de U; d'où la proposition suivante :

Théorème IV. — *En désignant par* $\mathrm{U}(\lambda, \mu) = 0$ *et par* $\mathrm{V}(\lambda, \mu) = 0$

les équations mixtes de deux courbes K *et* K′, *par* $H(\lambda, \mu)$ *le hessien de* $U(\lambda, \mu)$, *l'équation du lieu des points, où les tangentes à* K′ *sont coupées par leur conique polaire relativement à* K, *s'obtient en égalant à zéro le résultant des polynômes* $H(\lambda, \mu)$ *et* $V(\lambda, \mu)$.

En particulier, soit M un point du plan ayant pour coordonnées ξ et η; en posant pour abréger, comme je le ferai toujours par la suite,

$$X = x - \xi \quad \text{et} \quad Y = y - \eta,$$

l'équation mixte de ce point est

$$\lambda Y - \mu X = 0;$$

d'où cette conclusion :

Le lieu des points où les diverses droites qui passent par un point (ξ, η) *sont rencontrées par leurs coniques polaires, relativement à la courbe* $U(\lambda, \mu) = 0$, *a pour équation*

$$H(X, Y) = 0.$$

On a ainsi l'interprétation géométrique du hessien de la forme U; quant à l'équation $U(X, Y) = 0$, elle représente, comme on le sait, l'ensemble des tangentes que l'on peut mener du point (ξ, η) à la courbe.

8. Considérons la courbe K ayant pour équation mixte $U(\lambda, \mu) = 0$; si une droite se meut tangentiellement à la hessienne de cette courbe, sa conique polaire se compose de deux points, ou encore, si on la considère comme une courbe du second ordre, de la droite qui joint ces deux points, cette droite étant comptée deux fois. Le lieu des intersections des tangentes à la hessienne avec leurs coniques polaires est donc une courbe double, la cayleyenne de K; la proposition suivante permettra d'obtenir son équation.

THÉORÈME V. — *Étant donnée une courbe* K *ayant pour équation mixte* $U(\lambda, \mu) = 0$, *en désignant par* $H(\lambda, \mu)$ *le hessien de* U *et par* $W(\lambda, \mu) = 0$ *l'équation mixte de la hessienne de* K, *si l'on forme le résultant de* $H(\lambda, \mu)$ *et de* $W(\lambda, \mu)$, *ce résultant est un carré parfait* R^2, *et* $R = 0$ *est l'équation cartésienne de la cayleyenne de* K.

CHAPITRE II.

ÉQUATION MIXTE DE LA HESSIENNE D'UNE COURBE. ÉQUATION DE LA CAYLEYENNE.

9. Étant données une courbe K de classe n, dont l'équation tangentielle est

$$F(u, v, w) = 0,$$

et l'équation mixte

$$U(\lambda, \mu) = F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = 0,$$

l'équation tangentielle de sa hessienne est, comme on le sait,

$$\frac{1}{n(n-1)} \begin{vmatrix} \frac{d^2F}{du^2} & \frac{d^2F}{du\,dv} & \frac{d^2F}{du\,dw} \\ \frac{d^2F}{du\,dv} & \frac{d^2F}{dv^2} & \frac{d^2F}{dv\,dw} \\ \frac{d^2F}{du\,dw} & \frac{d^2F}{dv\,dw} & \frac{d^2F}{dw^2} \end{vmatrix} = 0;$$

son équation mixte sera par suite

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Des équations (3) et (4) on déduit

$$\begin{aligned} U_{11} &= F_{22} - 2yF_{23} + y^2F_{33}, \\ U_{12} &= -F_{12} + xF_{23} + yF_{13} - xyF_{33}, \\ U_{22} &= F_{11} - 2xF_{13} + x^2F_{33}. \end{aligned}$$

En désignant par $\Pi = 0$ l'équation de la polaire de la droite de

l'infini, l'équation (4)′ donne $\Pi = F_3$; d'où les relations

$$\Pi_1 = -F_{23} + yF_{23}, \quad \Pi_2 = F_{13} - xF_{33}.$$

En posant d'ailleurs $F_{33} = \varpi$, on sait que $\varpi = 0$ est l'équation mixte de la deuxième polaire de la droite de l'infini.

Des relations qui précèdent résulte l'identité

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} F_{22} - 2yF_{23} + y^2F_{33} & -F_{12} + xF_{23} + yF_{13} - xyF_{33} & -F_{23} + yF_{33} \\ -F_{12} + xF_{23} + yF_{13} - xyF_{33} & F_{11} - 2xF_{13} + x^2F_{33} & F_{13} - xF_{33} \\ -F_{23} + yF_{33} & F_{13} - xF_{33} & F_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & y \\ -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}.$$

L'équation mixte de la hessienne s'obtient en égalant à zéro le déterminant qui précède; d'où la proposition suivante :

Théorème VI. — *En désignant respectivement par* $U(\lambda, \mu) = 0$, $\Pi(\lambda, \mu) = 0$ *et* $\varpi(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes d'une courbe, de la première polaire et de la deuxième polaire de la droite de l'infini relativement à cette courbe, l'équation mixte de la hessienne de la courbe est* $W(\lambda, \mu) = 0$, W *désignant le polynôme*

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix}.$$

10. Cette forme remarquable de l'équation mixte donne lieu à diverses conséquences importantes que l'on peut en déduire, sans que l'on ait même besoin de déterminer l'expression des coefficients de Π et ϖ.

En particulier, je citerai les deux propositions suivantes, relatives aux courbes de troisième et de quatrième classe :

THÉORÈME. — *En désignant par* $(a, b, c, d) = 0$ [*] *l'équation mixte d'une courbe de troisième classe* K *et par* $(a', b', c', d') = 0$ *l'équation mixte d'une courbe quelconque de même classe* K′ *tangente aux neuf tangentes de rebroussement de la première, si l'on forme l'invariant* $I = ad' - 3bc' + 3cb' - da'$, *ce polynôme est identiquement nul.*

Démonstration. — Comme I est un *combinant* des deux formes (a, b, c, d) et (a', b', c', d'), il suffit de démontrer la proposition pour l'une quelconque des courbes du faisceau (K, K′), par exemple pour la hessienne. Supposons (a, b, c, d) réduite à la forme canonique $\lambda^3 + \mu^3$, on aura simplement $I = d' - a'$. Or, en posant

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{et} \quad \varpi = (A, B),$$

on déduit du théorème précédent :

$$(a', b', c', d') = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha\lambda + \beta\mu \\ 0 & \mu & \beta\lambda + \gamma\mu \\ \alpha\lambda + \beta\mu & \beta\lambda + \gamma\mu & A\lambda + B\mu \end{vmatrix};$$

d'où

$$a' = -\beta^2 \quad \text{et} \quad d' = -\beta^2;$$

par suite

$$I = \beta^2 - \beta^2 = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

THÉORÈME. — *En désignant par* $U = (a, b, c, d, e) = 0$ *l'équation mixte d'une courbe de quatrième classe* K *et par* (A, B, C, D, E, F, G) *le covariant sextique de* U, *par* $(a', b', c', d', e', f', g') = 0$ *l'équation mixte d'une courbe quelconque de sixième classe* K′ *tangente aux vingt-quatre tangentes de rebroussement de* K; *si l'on forme l'invariant* $I = Ag' - 6Bf' + 15Ce' - 20Dd' + 15Ec' - 6Fb' + Ga'$, *ce polynôme est identiquement nul.*

---

[*] Ici, comme je le ferai souvent dans la suite quand il n'y aura lieu de craindre aucune ambiguïté, je pose, pour abréger,

$$(a, b, c, d \mid \lambda, \mu)^4 = (a, b, c, d).$$

Démonstration. — La hessienne étant tangente aux vingt-quatre tangentes de rebroussement de K, l'équation mixte de K′ sera de la forme $W(\lambda, \mu) + U(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu)$, $V(\lambda, \mu) = 0$ étant l'équation mixte d'une conique quelconque.

Si nous supposons U réduite à sa forme canonique $\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^2$, on a simplement

$$I = (1 - 9m^2)(b' - f').$$

Or le théorème V donne la relation

$$(a', b', c', d', e', f', g') = (\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4)(P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2)$$
$$+ \begin{vmatrix} \lambda^2 + m\mu^2 & 2m\lambda\mu & \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 \\ 2m\lambda\mu & m\lambda^2 + \mu^2 & \beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda\mu + \delta\mu^2 \\ \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 & \beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda\mu + \delta\mu^2 & P'\lambda^2 + 2Q'\lambda\mu + R'\mu^2 \end{vmatrix},$$

en posant, pour abréger,

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad \varpi = (P', Q', R') \quad \text{et} \quad V = (P, Q, R).$$

On déduit de là, après quelques réductions faciles,

$$6b' = 6f' = 2Q + 2mQ' - 4\beta\gamma$$

et, par suite,

$$I = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

11. On peut donner à la formule énoncée dans le théorème V une forme un peu plus générale et d'un usage plus commode pour les applications.

Soient $\Pi_\omega = 0$ et $\varpi_\omega = 0$ les équations mixtes de la première polaire et de la deuxième polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$; on aura, d'après la formule (5),

$$\Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega\Pi.$$

On en déduit, en désignant par $\Pi_{\omega,1}$, $\Pi_{\omega,2}$,... les quantités analogues

Π_1 et Π_2, mais relatives à Π_ω,

$$\begin{aligned}
\Pi_{\omega,1} &= u U_{12} - v U_{11} + \omega \Pi_1, \\
\Pi_{\omega,2} &= u U_{22} - v U_{12} + \omega \Pi_2, \\
\varpi_\omega &= u \Pi_{\omega,2} - v \Pi_{\omega,1} + \omega \varpi',
\end{aligned}$$

$\varpi' = 0$ étant l'équation mixte de la polaire de la droite de l'infini, relativement à la première polaire de la droite $\omega = 0$, ou, ce qui est la même chose, de la polaire de cette droite relativement à la première polaire de la droite de l'infini.

On a donc

$$\varpi' = u \Pi_2 - v \Pi_1 + \omega \varpi$$

et, par suite,

$$(5') \qquad \varpi_\omega = u \Pi_{\omega,2} - v \Pi_{\omega,1} + \omega (u \Pi_2 - v \Pi_1) + \omega^2 \varpi.$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_{\omega,1} \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_{\omega,2} \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & \varpi_\omega \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & u U_{12} - v U_{11} + \omega \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & u U_{22} - v U_{12} + \omega \Pi_2 \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & u \Pi_{\omega,2} - v \Pi_{\omega,1} + \omega (u \Pi_2 - v \Pi_1) + \omega^2 \varpi \end{vmatrix}$$

$$= \omega \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ u U_{12} - v U_{11} + \omega \Pi_1 & u U_{22} - v U_{12} + \omega \Pi_2 & u \Pi_2 - v \Pi_1 + \omega \varpi \end{vmatrix}$$

$$= \omega^2 \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix} = \omega^2 W(\lambda, \mu);$$

d'où la formule suivante, qui permet d'exprimer le polynôme $W(\lambda, \mu)$ au moyen des deux premières polaires d'une droite quelconque

$\omega = ux + vy + wz = 0$:

$$(7) \qquad \omega^2 W(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_{\omega,1} \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_{\omega,2} \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & \varpi_\omega \end{vmatrix} = \varpi_\omega H - \Omega,$$

en posant

$$\Omega = U_{11}\Pi^2_{\omega,2} - 2U_{12}\Pi_{\omega,1}\Pi_{\omega,2} + U_{22}\Pi^2_{\omega,1}$$

et en désignant par H le hessien de U.

12. J'ai montré (théorème IV) que le résultant de H et de W était égal à Θ^2, Θ désignant le contrevariant de la forme primitive $F(u, v, w)$ qui, égale à zéro, donne l'équation de la cayleyenne; on déduit de ce qui précède

$$W = \frac{\varpi H - \Omega}{\omega};$$

le résultant Θ^2 est donc le résultant de H et de $\frac{-\Omega}{\omega}$; d'où la proposition suivante :

THÉORÈME VI. — *Si l'on forme le résultant du polynôme* H *et* $-\Omega$, *ce résultant est un carré parfait dont la racine est égale à* $\omega^{2(n-2)}\Theta$.

Remarque I. — Le premier terme de Ω est d'un poids égal à 2, le dernier terme de H d'un poids égal à $2(n-1)$: leur résultant est donc d'un poids égal à $4(n-2) + 6(n-1)(n-2)$, et, en vertu de la proposition fondamentale donnée (I), Θ est du degré

$$2(n-2) + 3(n-1)(n-2) - 2(n-2) = 3(n-1)(n-2).$$

C'est en effet, comme on le sait, le degré de la cayleyenne.

Remarque II. — La proposition précédente donne une infinité de formes pour Θ, puisque u, v et w sont arbitraires; on peut, par exemple, remplacer ces quantités par les dérivées partielles d'un contrevariant quelconque Φ de F, et la proposition précédente donnera une expression de $\Phi^{2(n-2)}\Theta$.

Remarque III. — On peut trouver d'autres expressions de Θ sou-

vent plus faciles à calculer. On a, par exemple, identiquement

$$\Omega U = [\Pi_{\omega,1}(\lambda U_{12} + \mu U_{22}) - \Pi_{\omega,2}(\lambda U_{11} + \mu U_{12})]^2 - H(\lambda \Pi_{\omega,1} + \mu \Pi_{\omega,2})^2.$$

Le résultant de H et de ΩU, c'est-à-dire $(\omega^{2(n-2)}\Theta\Delta)^2$, en désignant par Δ le discriminant de U [*], est donc égal au résultant de H et de

$$[\Pi_{\omega,1}(\lambda U_{12} + \mu U_{22}) - \Pi_{\omega,2}(\lambda U_{11} + \mu U_{12})]^2.$$

D'où cette conséquence :

Si l'on forme le résultant de H *et de* $\Pi_{\omega,1} U_2 - \Pi_{\omega,2} U_1$, *ce résultant est égal à* $\omega^{2(n-2)}\Delta\Theta$.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DE L'ÉQUATION MIXTE DE LA POLAIRE D'UNE DROITE.

13. Les formules (6) données précédemment (4) permettent d'exprimer les coefficients de l'équation mixte de la polaire de la droite de l'infini (et par suite de la polaire d'une droite quelconque) au moyen des dérivées partielles des coefficients de U; mais il est préférable d'introduire les dérivées partielles d'un certain nombre d'invariants de cette forme.

Je m'appuierai sur la proposition suivante :

THÉORÈME VII. — *Étant donné un invariant quelconque* I *de la forme* U, *en désignant son poids par i, on a les deux équations*

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha \dfrac{dI}{db} + 2\beta \dfrac{dI}{dc} + 3\gamma \dfrac{dI}{dd} + \ldots = \nu_1, \\ n\alpha \dfrac{dI}{da} (n-1)\beta \dfrac{dI}{db} + (n-2)\gamma \dfrac{dI}{dc} - \ldots = \nu_1, \end{cases}$$

où $(a, b, c, \ldots) = 0$ *est l'équation mixte de* K *et* $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$ *l'équa-*

[*] Δ est le *réciprocant* de F; l'équation $\Delta = 0$ représente en coordonnées cartésiennes la courbe K.

tion mixte de la polaire de la droite $\omega = 0$ *et où j'ai posé, pour abréger,*

$$\mathfrak{x}_1 = -iv\mathrm{I} + \omega\frac{d\mathrm{I}}{dy}, \quad \mathfrak{y}_1 = ui\mathrm{I} - \omega\frac{d\mathrm{I}}{dx}.$$

Démonstration. — Des formules (5) et (6) on déduit facilement les relations suivantes :

$$(6')\left\{\begin{array}{l} n\alpha = \omega\dfrac{da}{dy} + n(ub - va), \\ (n-1)\beta = \omega\dfrac{db}{dy} + (n-1)(uc - vb), \\ (n-2)\gamma = \omega\dfrac{dc}{dy} + (n-2)(ud - vc) + \ldots, \\ 0 = \dfrac{da}{dx}, \quad \alpha = -\omega\dfrac{db}{dx} + ub - va, \quad 2\beta = -\omega\dfrac{dc}{dx} + 2(uc - vb)\ldots; \end{array}\right.$$

par suite, on a

$$\begin{aligned} \omega\frac{d\mathrm{I}}{dx} &= \frac{d\mathrm{I}}{db}(-\alpha + ub - va) + \frac{d\mathrm{I}}{dc}(-2\beta + 2uc - 2vb) + \ldots \\ &= -\alpha\frac{d\mathrm{I}}{db} - 2\beta\frac{d\mathrm{I}}{dc} - 3\gamma\frac{d\mathrm{I}}{dd} + u\left(b\frac{d\mathrm{I}}{db} + 2c\frac{d\mathrm{I}}{dc} + \ldots\right) \\ &\quad - v\left(a\frac{d\mathrm{I}}{db} + 2b\frac{d\mathrm{I}}{dc} + \ldots\right) \end{aligned}$$

ou encore, d'après les propriétés bien connues des invariants,

$$\omega\frac{d\mathrm{I}}{dx} = -\left(\alpha\frac{d\mathrm{I}}{db} + 2\beta\frac{d\mathrm{I}}{dc} + 3\gamma\frac{d\mathrm{I}}{dd} + \ldots\right) + ui\mathrm{I};$$

d'où enfin

$$\alpha\frac{d\mathrm{I}}{db} + 2\beta\frac{d\mathrm{I}}{dc} + 3\gamma\frac{d\mathrm{I}}{dd} + \ldots = +ui\mathrm{I} - \omega\frac{d\mathrm{I}}{dx}.$$

L'autre formule se démontrerait de la même manière.

14. Dans l'application des formules précédentes, je considérerai deux cas suivant que la courbe K est de classe paire ou de classe impaire.

Dans le premier cas, le nombre des coefficients α, β,... inconnus est pair; considérons $\frac{n}{2}$ invariants I, I′, I″,... de la forme U et désignons par $\mathfrak{x}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{y}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{x}_{\mathrm{I}'}$, $\mathfrak{y}_{\mathrm{I}}$,... les polynômes formés de la façon indiquée au moyen des dérivées partielles de ces invariants : nous obtiendrons n équations linéaires de la forme (8), qui permettront d'exprimer les coefficients inconnus en fonction des coefficients de U et des polynômes $\mathfrak{x}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{y}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{x}_{\mathrm{I}'}$,....

L'introduction de ces polynômes se trouve justifiée par le fait important que le polynôme Π_ω devient alors un covariant multiple de U, les divers couples de variables étant λ, μ; $\mathfrak{x}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{y}_{\mathrm{I}}$;....

15. Si la courbe est de classe impaire, nous choisirons $\frac{n-1}{2}$ invariants qui fourniront $(n-1)$ relations linéaires entre les inconnues; une dernière relation linéaire peut être obtenue de la façon suivante. La méthode est évidemment générale, mais je ne l'exposerai que pour le cas d'une courbe de cinquième classe.

Soient $U = (a, b, c, d, e, f) = 0$ l'équation mixte d'une courbe de cinquième classe et (A, B, C, D) un covariant quelconque du troisième ordre de U; en désignant, pour un instant, par $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \varepsilon_0) = 0$ l'équation de la polaire de la droite de l'infini, posons

$$\Upsilon = \begin{vmatrix} a & b & \alpha_0 & A & 0 \\ 4b & 4c & 4\beta_0 & 3B & A \\ 6c & 6d & 6\gamma_0 & 3C & 3B \\ 4d & 4e & 4\delta & D & 3C \\ e & f & \varepsilon_0 & 0 & D \end{vmatrix};$$

en appelant $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = 0$ l'équation mixte de la polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$, on déduira de la formule (5)

$$\omega\Upsilon = \begin{vmatrix} a & b & \alpha & A & 0 \\ 4b & 4c & 4\beta & 3B & A \\ 6c & 6d & 6\gamma & 3C & 3B \\ 4d & 4e & 4\delta & D & 3C \\ e & f & \varepsilon & 0 & D \end{vmatrix};$$

d'où l'on conclut que Υ est un contrevariant de la forme fondamentale F [*].

En développant cette égalité, on obtiendra une équation linéaire qui, avec les $n-1$ autres précédemment obtenues, permettra d'exprimer les coefficients de Π_ω.

16. Des relations établies plus haut, n° **15**, on peut déduire une proposition générale, dont se déduisent un grand nombre de propriétés des courbes algébriques.

Soit I un invariant quelconque de U, en sorte que l'on ait les relations

$$\alpha\frac{dI}{db}+2\beta\frac{dI}{dc}+3\gamma\frac{dI}{dd}+\ldots=\omega I-\omega\frac{dI}{dx},$$

$$n\alpha\frac{dI}{da}+(n-1)\beta\frac{dI}{db}+(n-2)\gamma\frac{dI}{dc}+\ldots=-\omega I+\omega\frac{dI}{dy}.$$

Considérons la courbe K′ composée de la polaire de la droite $\omega=0$ et d'un point ξ, η; en posant $X=x-\xi$ et $Y=y-\eta$, l'équation mixte de ce point est

$$\lambda Y-\mu X=0;$$

par suite, l'équation mixte de K′ est

$$n\left[\alpha\lambda^{n-1}+(n-1)\beta\lambda^{n-2}\mu+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\gamma\lambda^{n-3}\mu^2+\ldots\right](\lambda Y-\mu X)=0,$$

ou bien encore

$$[n\alpha Y,\ (n-1)\beta Y-\alpha X,\ (n-2)\gamma Y-2\alpha X,\ldots](\lambda,\mu)^n=0.$$

En représentant le premier membre de cette équation par $(a',b',c',\ldots$,

[*] Il est bien clair que ce procédé peut être varié de bien des manières et que (si n est >4) il peut être aussi employé quand n est pair.

Cette équation, ainsi que beaucoup de celles établies dans ce Mémoire, est susceptible de diverses interprétations géométriques; mais leur développement m'écarterait trop de mon sujet principal.

on trouvera, par la valeur de l'invariant,

$$\mathfrak{J} = a'\frac{dI}{da} + b'\frac{dI}{db} + c'\frac{dI}{dc} + \ldots,$$

$$\mathfrak{J} = Y\left[n\alpha\frac{dI}{da} + (n-1)\beta\frac{dI}{db}\ldots\right] - X\left(\alpha\frac{dI}{db} + 2\beta\frac{dI}{dc}\ldots\right),$$

ou encore, en vertu des relations transcrites ci-dessus,

$$\mathfrak{J} = \omega\left(X\frac{dI}{dx} + Y\frac{dI}{dy}\right) - iI(uX + vY).$$

Posons

$$u\xi + v\eta + z\zeta = \omega',$$

on aura

$$uX + vY = \omega - \omega'$$

et

$$\mathfrak{J} = \omega\left[(x-\xi)\frac{dI}{dx} + (y-\eta)\frac{dI}{dy} - iI\right] + i\omega' I.$$

Remarquons maintenant que le poids i de l'invariant I est précisément le degré de ce polynôme en x, y, z; d'après le théorème des fonctions homogènes, on aura donc

$$(9)\qquad \omega\left(\xi\frac{dI}{dx} + \eta\frac{dI}{dy} + \zeta\frac{dI}{dz}\right) = i\omega' I - \mathfrak{J}$$

et, par suite, si le point ξ, η est sur la droite $\omega = 0$,

$$(10)\qquad \omega\left(\xi\frac{dI}{dx} + \eta\frac{dI}{dy} + \zeta\frac{dI}{dz}\right) = -\mathfrak{J}.$$

Je ferai remarquer que la quantité entre parenthèses dans le premier membre de cette équation représente, quand on l'égale à zéro, la polaire du point (ξ, η) relativement à la courbe $I = 0$.

17. Le cas particulier le plus intéressant à considérer est celui où, K étant de classe paire, on considère l'invariant quadratique I de U.

En convenant d'appeler *faisceaux harmoniques* deux faisceaux de n droites, tels que les équations du degré n qui les déterminent aient leur invariant quadratique nul, on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Étant donnée une courbe* K *de classe* $2n$, *si l'on*

considère la courbe C *du degré* $2n$, *dont l'équation s'obtient en égalant à zéro l'invariant quadratique de l'équation mixte de* K *et le lieu des points d'où l'on voit suivant deux faisceaux harmoniques : 1° la polaire d'une droite quelconque* D, *prise par rapport à* K, *et un point* M *de cette droite; 2° la courbe* K, *ce lieu se compose de la droite* D *elle-même et de la courbe du* $(2n-1)$ *ordre qui est la polaire du point* M *relativement à* C.

CHAPITRE IV.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX COURBES DE TROISIÈME ET DE QUATRIÈME CLASSE.

18. Considérons une courbe de troisième classe K, dont l'équation mixte soit

$$U = (a, b, c, d) = 0;$$

soit Δ son discriminant, en sorte que $\Delta = 0$ est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes. En appelant H et J le hessien et le covariant cubique de U, je poserai, pour abréger,

$$H = (A, B, C) \quad \text{et} \quad J = (a', b', c', d').$$

Cela posé, en considérant l'invariant Δ, les équations (8) donnent les relations

$$\alpha\frac{d\Delta}{db} + 2\beta\frac{d\Delta}{dc} + 3\gamma\frac{d\Delta}{dd} = 6u\Delta - \omega\frac{d\Delta}{dx},$$

$$3\alpha\frac{d\Delta}{da} + 2\beta\frac{d\Delta}{db} + \gamma\frac{d\Delta}{dc} = -6v\Delta + \omega\frac{d\Delta}{dy},$$

que l'on peut écrire

$$-d'\alpha + 2c'\beta - b'\gamma = -v\Delta + \frac{1}{6}\omega\frac{d\Delta}{dy} = \mathfrak{x},$$

$$c'\alpha - 2b'\beta + a'\gamma = u\Delta - \frac{1}{6}\omega\frac{d\Delta}{dx} = \mathfrak{y}.$$

Posons en outre (*voir* n° **15**)

$$\omega\Theta = \begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ c & d & \gamma \end{vmatrix};$$

Θ est un contrevariant de la forme $F(u, v, w)$ qui, égalé à zéro, donne l'équation tangentielle de K; dans le cas actuel, l'équation $\Theta = 0$ représente, comme il est facile de le voir, la cayleyenne de K [*].

Le déterminant développé donne l'égalité

$$\alpha C - 2\beta B + \gamma A = \omega\Theta,$$

qui, jointe aux égalités précédentes, permet d'obtenir α, β et γ par les formules

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} - 2A\omega\Theta,\\ \Delta\beta &= b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} - 2B\omega\Theta,\\ \Delta\gamma &= c\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} - 2C\omega\Theta,\end{aligned}\right.$$

qui, quand on réduit U à sa forme canonique $a\lambda^2 + d\mu^2$, prennent la forme très-simple suivante :

$$(11')\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\mathfrak{x},\\ \Delta\beta &= -ad\omega\Theta,\\ \Delta\gamma &= d\mathfrak{y}.\end{aligned}\right.$$

En désignant, comme je l'ai fait jusqu'ici, par $H_\omega = 0$ l'équation de la polaire de la droite $\omega = 0$, relativement à la courbe K, on aura

$$(12)\qquad \Delta H_\omega = \mathfrak{x}U_1 + \mathfrak{y}U_2 - 2\omega\Theta H.$$

L'équation en coordonnées cartésiennes de cette polaire est

$$\alpha\gamma - \beta^2 = 0;$$

en nous servant de la forme canonique de la forme U, on trouve immédiatement

$$\Delta^2(\alpha\gamma - \beta^2) = ad\mathfrak{x}\mathfrak{y} - a^2d^2\omega^2\Theta^2;$$

d'où, généralement,

$$\Delta^2(\alpha\gamma - \beta^2) = H(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \omega^2\Delta\Theta^2.$$

---

[*] *Voir* mon *Mémoire de Géométrie analytique*, déjà cité, n° 14.

19. Considérons maintenant une courbe de quatrième classe K ayant pour équation mixte $U = (a, b, c, d, e) = 0$; soient S et T les invariants quadratique et cubique de U; son discriminant Δ est égal à $S^3 - 27T^2$, et l'on sait d'ailleurs que $\Delta = 0$ est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes. Je représenterai, pour abréger, le hessien H de U par la notation (a', b', c', d', e').

Cela posé, en considérant les invariants S et T, les formules (8) donnent les quatre relations suivantes :

$$\alpha e - 3\beta d - 3\gamma c - \delta b = -\ vS + \frac{\omega}{4}\frac{dS}{dy} = -S_1,$$

$$-\alpha d - 3\beta c - 3\gamma b + \delta a = \quad uS - \frac{\omega}{4}\frac{dS}{dx} = -S_2,$$

$$\alpha e' - 3\beta d' + 3\gamma c' - \delta b' = -\frac{3}{2}vT + \frac{\omega}{4}\frac{dT}{dy} = -T_1,$$

$$-\alpha d' + 3\beta c' - 3\gamma b' + \delta a' = \quad \frac{3}{2}uT - \frac{\omega}{4}\frac{dT}{dx} = -T_2,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= a(18TT_1 - S^2S_1) + b(18TT_2 - S^2S_2) \\
&\quad + a'(18TS_1 - 12ST_1) + b'(18TS_2 - 12ST_2), \\
\Delta\beta &= b(18TT_1 - S^2S_1) + c(18TT_2 - S^2S_2) \\
&\quad + b'(18TS_1 - 12ST_1) + c'(18TS_2 - 12ST_2), \\
\Delta\gamma &= c(18TT_1 - S^2S_1) + d(18TT_2 - S^2S_2) \\
&\quad + c'(18TS_1 - 12ST_1) + d'(18TS_2 - 12ST_2), \\
\Delta\delta &= d(18TT_1 - S^2S_1) + d(18TT_2 - S^2S_2) \\
&\quad + d'(18TS_1 - 12ST_1) + e'(18TS_2 - 12ST_2)
\end{aligned}$$

Posons enfin, pour abréger,

$$\mathfrak{x} = 18TT_1 - S^2S_1 = \frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dy} - v\Delta,$$

$$\mathfrak{y} = 18TT_2 - S^2S_2 = -\frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dx} + u\Delta,$$

$$\mathfrak{x}' = 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy}, \quad \mathfrak{y}' = -2S\frac{dT}{dx} + 3T\frac{dS}{dx};$$

on aura enfin

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(a'\mathfrak{x}' + b'\mathfrak{y}'),\\ \Delta\beta &= b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(b'\mathfrak{x}' + c'\mathfrak{y}'),\\ \Delta\gamma &= c\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(c'\mathfrak{x}' + d'\mathfrak{y}'),\\ \Delta\delta &= d\mathfrak{x} + e\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(d'\mathfrak{x}' + e'\mathfrak{y}'); \end{aligned}\right.$$

d'où encore

$$(14)\qquad \Delta\Pi_\omega = \mathfrak{x}U_1 + \mathfrak{y}U_2 + \frac{3\omega}{2}(\mathfrak{x}'H_1 + \mathfrak{y}'H_2).$$

20. J'ai montré (n° **12**, *Remarque III*) qu'en désignant par Θ l'équation de la cayleyenne de K, $\omega^4\Delta\Theta$ était le résultant de H et du polynôme $\Pi_{\omega,1}U_2 - \Pi_{\omega,2}U_1$; dans le cas actuel, ce polynôme se compose de deux parties : la première $\mathfrak{x}(U_{11}U_2 - U_{12}U_1) + \mathfrak{y}(U_{21}U_2 - U_{22}U_1)$ est exactement divisible par H : il n'y a donc pas à en tenir compte; la seconde, $Z = \frac{\omega}{4}\times\frac{\mathfrak{x}'(H_{11}U_2 - H_{12}U_1) + \mathfrak{y}'(H_{12}U_2 - H_{22}U_1)}{\Delta}$: le résultant de Z et de H est donc égal à $\omega^4\Delta\Theta$. Sans faire de calcul, on voit que ce résultat est le produit par $\frac{\omega^4}{\Delta^4}$ d'un covariant du quatrième degré et du vingtième ordre; on a donc

$$\Delta^5\Theta = pTU(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') + qH(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'),$$

p et q désignant des invariants de U (fonctions entières, par conséquent, de S et de T) du seizième et du dix-huitième ordre.

Recherches sur la dispersion des éléments d'un obus à balles après l'explosion;

PAR M. H. RESAL.

Immédiatement après l'explosion d'un obus à balles, les fragments de l'enveloppe et les balles prennent certaines vitesses que l'on ne peut guère apprécier, et sur la grandeur et la direction desquelles on ne peut faire que des conjectures plus ou moins plausibles, jusqu'au moment où l'expérience sera venue nous éclairer sur quelques points principaux.

Les seuls principes de la Mécanique auxquels on puisse faire appel dans la question, savoir le principe du mouvement du centre de gravité et celui des moments par rapport à la tangente à la trajectoire au point où se trouve le projectile à l'instant où l'explosion a lieu, ne conduisent à aucune conséquence utile : aussi n'ai-je pas eu à les faire intervenir dans ce qui suit.

Avant d'aborder la question, je crois devoir développer quelques considérations générales qui, à mon point de vue, ne sont pas sans importance.

I. — DU POIDS DE POUDRE STRICTEMENT NÉCESSAIRE POUR BRISER UN PROJECTILE CREUX QUI NE RENFERMERAIT PAS DE BALLES. — DE L'EXPLOSION.

Soient

$\alpha = 0,00366$ le coefficient de dilatation des gaz (REGNAULT);

$\delta = 860^{kg}$ la *densité gravimétrique* de la poudre rapportée au mètre cube (PIOBERT);

$A = 425^{kg}$ l'équivalent mécanique de la chaleur;

$\gamma = 620$ calories la quantité de chaleur développée par 1 kilogramme de poudre (composition théorique) brûlant sous son propre volume;

$c' = 0,18547$ la chaleur spécifique des gaz produits;

$T = 3340^{\circ}$ la température développée;

$P = 4374^{atm} . 10330^{kg} = 45183420^{kg}$ la pression résultante.

} SCHISKOFF et BUNSEN (*).

On déduit de là les valeurs numériques suivantes, qui nous seront utiles plus loin :

$$\frac{c'}{\alpha} = 51, \quad \frac{2c'\delta}{\alpha} = 87720, \quad 1 + \alpha T = 13,$$

$$\frac{2c'\delta}{\alpha}(1 + \alpha T) = 1133090, \quad \frac{2c'\delta}{\alpha}\left(\frac{1 + \alpha T}{P}\right) = 0,0250.$$

Cas d'un projectile sphérique.

Soient

R le rayon moyen de l'enveloppe;

e son épaisseur, que nous supposerons assez petite pour que l'on puisse négliger le carré de $\frac{e}{R}$ devant l'unité;

V_0 son volume intérieur;

E, I le coefficient d'élasticité de la matière et sa résistance à la rupture par mètre carré;

p_0 la pression extérieure;

p la pression intérieure développée avant la rupture du projectile par la combustion d'un poids q de poudre;

t la température des gaz produits;

λ, $N = E\lambda$ la dilatation linéaire et la tension élastique par mètre carré, dues à la pression p.

---

[*] D'après les mêmes physiciens, les produits gazeux de la combustion ne forment que 0,314 du poids total.

Le volume primitif V_0 étant devenu $V_0(1+3\lambda)$, le travail développé par la pression variable est $3V_0 f(p-p_0)\,d\lambda$, et l'on a, d'après les principes de la Thermodynamique,

$$q\gamma = qc't + \frac{3V_0}{A}\int(p-p_0)\,d\lambda.$$

Mais on sait que

$$(1)\qquad N = E\lambda = \frac{(p-p_0)R}{2e},$$

d'où

$$p - p_0 = \frac{2Ee\lambda}{R} = \frac{2eN}{R}.$$

En portant cette valeur dans la formule précédente, on trouve

$$q\gamma = qc't + \frac{3V_0}{A}\frac{Ee}{R}\frac{\lambda^2}{2} = qc't + \frac{3V_0 eN^2}{ARE}$$

et

$$(2)\qquad q\left(\gamma + \frac{c'}{\alpha}\right) = q\frac{c'}{\alpha}(1+\alpha t) + \frac{3V_0 eN^2}{ARE}.$$

Or on a, d'après la loi de Gay-Lussac,

$$\frac{V_0(1+3\lambda)p}{1+\alpha t} = \frac{q}{\delta}\frac{P}{1+\alpha T},$$

d'où

$$q(1+\alpha t) = \delta.V_0(1+3\lambda)(1+\alpha T)\frac{p}{P} = \frac{\delta.V_0(1+3\lambda)}{P}(1+\alpha T)\left(\frac{2eN}{R}+p_0\right).$$

Mais, comme 3λ est toujours une très-petite fraction, on peut écrire tout simplement

$$(3)\qquad q(1+\alpha t) = \frac{\delta.V_0(1+\alpha T)}{P}\left(\frac{2eN}{R}+p_0\right).$$

L'équation (2) donne par suite

$$q = \frac{V_0}{\gamma + \frac{c'}{\alpha}}\left[\frac{3eN^2}{ARE} + \frac{2c'\delta}{\alpha}\frac{(1+\alpha T)}{P}\left(\frac{2eN}{R}+p_0\right)\right],$$

et en introduisant les valeurs numériques données plus haut et négli-

geant la pression atmosphérique, qui est relativement petite,

$$(4) \qquad q = \frac{V_0 N}{671}\left[\frac{e}{R}\left(\frac{3N}{425E} + 0,025\right)\right].$$

Supposons que le projectile soit en fonte, on a

$$\Gamma = 14.10^6 \quad \text{et} \quad E = 10^9,$$

par suite

$$\frac{3N}{425E} = 0,0001,$$

et, lorsque $N = \Gamma$ ou lorsque la rupture est imminente,

$$(5) \qquad q = 522\, V_0 \frac{e}{R}.$$

Si maintenant on veut évaluer les poids en *grammes* et les volumes en centimètres cubes, il faut remplacer q par $\frac{q}{1000}$, V_0 par $\frac{V_0}{10^6}$, ce qui donne

$$(A) \qquad q^{gr} = 0,522 \frac{e}{R} V_0^{cc}.$$

Cas d'un projectile cylindrique.

Une enveloppe cylindrique offrant une résistance moitié moindre qu'une enveloppe sphérique de même diamètre et de même épaisseur, il faut diviser l'expression précédente par 2, ce qui donne

$$(B) \qquad q^{gr} = 0,261 \frac{e}{R} V_0.$$

Application à l'obus à balles de 12 (modèle de 1866). — On a

$$\frac{e}{R} = \frac{14}{52}, \quad V_0 = 768,$$

d'où

$$q = 54^{kg},$$

tandis que la charge est de 200 grammes, ce que l'on explique par la présence des balles, comme on le verra ci-après.

Il faut donc multiplier la valeur (B) par un certain coefficient déduit de la comparaison avec l'expérience.

Si nous prenons

$$q = \frac{e}{R} V_0, \tag{C}$$

on trouve, dans le cas actuel,

$$q = 206^{gr},$$

ce qui est d'accord avec la réalité.

Obus à balles de 4 (modèle de 1864). — On a

$$\frac{e}{R} = \frac{10}{37}, \quad V_0 = 331,$$

d'où, en vertu de la formule (C),

$$q = 89^{gr};$$

en pratique, on prend $q = 85^{gr}$.

Il y a donc tout lieu d'admettre, jusqu'à preuve du contraire, que la formule (C), qui est extrêmement simple, a un caractère pratique.

La quantité de chaleur transformée en travail, pour détruire l'enveloppe, est négligeable.

Cette quantité de chaleur correspond, en effet, au terme

$$\frac{3N}{425E} = 0,0001,$$

dont nous avons tenu compte, mais qui est négligeable devant le terme principal 0,025; de sorte que la désagrégation de l'enveloppe n'ab-

sorbe que $\frac{1}{252}$ de la chaleur dégagée par la combustion de la poudre, et il est clair que, dans les appréciations du genre de celles auxquelles nous nous livrons, on peut négliger une pareille fraction devant l'unité.

Du travail qui devrait être produit pour anéantir la quantité de chaleur développée par la combustion de la poudre.

Ce travail a pour valeur

$$q \times 0,62 \times 425 = 264 q^{\text{kgm}},$$

soit pour $q = 200$, c'est-à-dire pour la charge d'un obus de 12,

$$q = 52800^{\text{kgm}} = 704^{\text{chx}}.$$

La masse totale du projectile chargé étant $\frac{11^{\text{kg}},79}{9,809} = 1,2$, si les gaz se détendaient spontanément, la vitesse moyenne w, communiquée à leurs molécules et aux éléments solides, serait donnée par

$$0,60\, w^2 = 52800,$$

d'où

$$w = 296^{\text{m}},$$

ce qui est énorme. Il faut donc conclure de là que les gaz emportent avec eux, à l'état sensible, une grande partie de leur chaleur totale et qu'ils sont en même temps animés de très-grandes vitesses par rapport à celles des éléments solides; mais, toutefois, il y a lieu de conjecturer que ces dernières ne sont pas négligeables.

De l'explosion.

Lorsque la poudre s'enflamme, il se développe une pression graduelle qui atteint son maximum à l'instant où l'enveloppe éclate; mais

la durée du phénomène est tellement petite que l'on peut, sans erreur sensible, supposer, comme dans la théorie des chocs, que les éléments matériels m de la partie solide du corps n'ont pas changé de position pendant ce temps, quoique leurs vitesses aient pu éprouver des modifications importantes.

La masse m possédera, après l'explosion, la même vitesse qu'auparavant et, de plus, une certaine vitesse due à l'action des gaz produits, qui doit varier avec la distance de ce point à l'axe de figure et qui pourra être différente, toutes choses égales d'ailleurs, en passant d'un calibre à un autre.

Quoique le temps écoulé entre l'inflammation de la poudre et l'explosion soit très-court, cette période présente différentes phases qu'il est utile d'étudier.

Le soufre qui relie la moitié de la masse des balles, étant en contact avec la poudre, doit d'abord se briser, puis se fondre; l'enveloppe se dilate graduellement avant de se rompre; les balles prennent ainsi un peu de jeu; mais, malgré cela, les gaz éprouvent des résistances notables en traversant les interstices, de sorte qu'à chaque instant la pression est à son maximum dans l'ogive, qui est la partie la plus résistante de l'enveloppe, et va en diminuant avec la distance au culot; c'est ainsi que l'on peut expliquer pourquoi il faut employer plus de poudre pour briser cette enveloppe que celle qui serait nécessaire dans le cas où elle ne renfermerait pas de balles.

Lorsque l'enveloppe se rompt, les gaz contenus dans l'ogive se détendent très-rapidement, en même temps que d'autres se produisent si toute la poudre n'est pas brûlée. La vitesse des éclats de la partie antérieure, estimée parallèlement au plan de tir, éprouve par suite une augmentation, à l'inverse de ce qui a lieu pour les éclats postérieurs et les balles; en d'autres termes, les premiers éclats sont des projectiles par rapport au reste de l'obus, dont l'ensemble éprouve une sorte de mouvement de recul.

Mais en même temps les gaz confinés entre les balles s'écoulent à l'extérieur et déterminent, suivant les rayons, des vitesses qui ont bientôt atteint leur maximum. Ces vitesses *radiales* étant nulles sur l'axe, on

peut, sans erreur sensible, *supposer qu'elles sont proportionnelles aux rayons* [*].

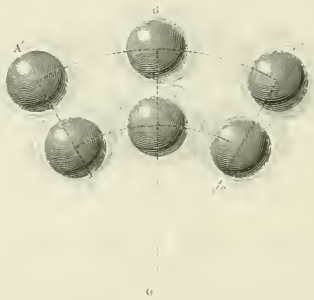
Appréciation de l'ordre de grandeur de la vitesse radiale.

La seule donnée que nous ayons sur l'importance de la dispersion latérale consiste dans l'estimation à 20 degrés environ de l'ouverture du cône de projection, de sorte que la vitesse radiale aR (a étant une constante), correspondant au rayon moyen R de la partie cylindrique du projectile, serait environ $\frac{1}{6}$ de la vitesse restante V.

---

[*] Supposons qu'une tranche de balles perpendiculaire à l'axe du projectile ne soit nullement influencée dans le sens longitudinal. Soient A, B, C trois balles, dont les

Fig. 1.



centres soient situés sur un même cercle; A', B', C' les balles qui les suivent immédiatement sur les mêmes rayons.

D'après l'observation, le vent doit avoir une vitesse plus considérable que celle des balles adjacentes. Il se produit donc en avant de B un remous, par suite une réduction sur la pression d'arrière, d'où une accélération dans le mouvement de cette balle. Comme, dans le moment très-court où la détente des gaz produit les effets les plus importants, la plus forte chute de pression a lieu en avant, il s'ensuit que ce sont les balles extérieures qui acquièrent les plus grandes vitesses radiales, puis celles qui les précèdent immédiatement, ainsi de suite jusqu'à l'axe où il ne se produit aucun effet, ce qui est conforme à ce que nous avons avancé plus haut.

Il s'agit de voir si l'on a quelque raison pour considérer cette règle, sinon comme exacte, du moins comme un à peu près.

La vitesse initiale V_0 pouvant, sans grande erreur, être regardée comme proportionnelle à la racine carrée de la charge relative c, on peut poser

$$(a) \qquad V = K\sqrt{c},$$

K étant un coefficient, qui diminue à mesure que le point d'explosion s'éloigne de la bouche à feu; mais, comme ce point ne peut occuper que quelques positions déterminées sur un arc assez limité de la trajectoire, K peut être considéré comme constant et égal à sa valeur correspondant à la position moyenne.

Ainsi, pour un obus de 4, on a, à la distance minimum de 500 mètres,

$$\frac{V}{V_0} = \frac{284}{325} = 0,87;$$

à la distance maximum de 1200 mètres,

$$\frac{V}{V_0} = \frac{237}{325} = 0,73;$$

en prenant la moyenne

$$(b) \qquad \frac{V}{V_0} = 0,80:$$

l'erreur relative commise est inférieure à $\frac{1}{10}$.

Nous pouvons, dans cet aperçu, admettre, dans certaines limites, que les projectiles chargés ont des masses semblables, de sorte qu'en appelant Q le poids de l'un d'eux, son moment d'inertie est proportionnel à QR^2. La demi-force vive radiale $\frac{1}{2}\Sigma ma^2r^2 = \frac{a^2}{2}\Sigma mr^2$ sera donc proportionnelle à QR^2; mais elle serait proportionnelle à la charge q du projectile, si cette charge était totalement utilisée à la produire. On peut donc admettre qu'il en est encore, dans la réalité, de même en affectant q d'un facteur inférieur à l'unité. En appelant

$c' = \frac{q}{Q}$ la charge relative du projectile, $a\mathrm{R}$ est donc de la forme

$$(c) \qquad a\mathrm{R} = \mathrm{K}'\sqrt{c'},$$

d'où, en posant $h = \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$,

$$(d) \qquad \frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\sqrt{\frac{c'}{c}} = h\sqrt{\frac{c'}{c}},$$

ce qui exprime que *le rapport de la vitesse radiale maximum à la vitesse restante est proportionnel à la racine carrée du rapport des charges du projectile et de la bouche à feu.*

On a, pour l'obus de 12,

$$c' = \frac{200}{11790} = 0{,}0170, \quad c = \frac{1}{11790} = 0{,}08848, \quad \sqrt{\frac{c}{c'}} = 2{,}2;$$

pour l'obus de 4,

$$c' = \frac{85}{4718} = 0{,}0180, \quad c = \frac{55}{4718} = 0{,}1166, \quad \sqrt{\frac{c}{c'}} = 2{,}5.$$

Le rapport $\frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{V}}$ est donc sensiblement le même pour ces deux calibres, ce qui paraît justifier la règle ci-dessus énoncée, représentée par la formule

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{V}} = \frac{1}{6},$$

d'où, en vertu de l'équation (b), établie pour les pièces de 4,

$$(\mathrm{E}') \qquad a\mathrm{R} = \frac{\mathrm{V}_0}{8},$$

à peu de chose près.

Soient Ω la vitesse angulaire de rotation; i l'inclinaison de l'hélice sur l'axe de la pièce : on a

$$\Omega\mathrm{R} = \mathrm{V}_0 \operatorname{tang} i.$$

Pour les obus de 12,

$$i = 7^\circ 35', \quad \Omega R = 0,115 V_0;$$

pour les obus de 4,

$$i = 7^\circ 15', \quad \Omega R = 0,110 V_0.$$

On ne commettra pas une grande erreur en posant pour les deux calibres

$$\text{(G)} \qquad \Omega R = \frac{V_0}{9}.$$

Il résulte de ce qui précède que *les vitesses radiales et gyratoires maxima sont du même ordre de grandeur;* il importe donc de les faire intervenir simultanément dans nos recherches sur la dispersion.

Pour faire cesser toute incertitude sur la valeur de la vitesse radiale a, rapportée à l'unité de distance de l'axe, il paraîtrait utile de faire quelques séries d'expériences dans les conditions ci-après :

Un obus à balles serait attaché par son sommet au milieu d'une corde fixée à la même hauteur à ses deux extrémités (pour laisser toute liberté à l'action de la poudre sur la propulsion et le recul).

La hauteur du projectile serait portée de 5 mètres au-dessus du niveau du sol, mais dans l'axe d'un puits de 5 mètres de profondeur. Au fond de ce puits serait établi un plancher badigeonné à la chaux, et sur lequel on tracerait deux séries de lignes noires rectangulaires espacées de $0^m,20$.

Au niveau du sol, sur l'ouverture du puits, on placerait un écran formé d'un châssis sur lequel on tendrait à la partie inférieure du papier où l'on reproduirait le système de lignes du plancher et en faisant coïncider, en projection horizontale, les deux systèmes. A la partie supérieure, on tendrait du calicot pour amoindrir l'effet du vent sur le papier, en vue de l'empêcher de se briser avant le passage du projectile.

Quelques expériences préliminaires permettraient de déterminer les dimensions transversales du puits (un diamètre de 5 à 6 mètres serait probablement suffisant).

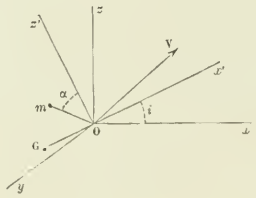
En faisant le relevé du périmètre des empreintes des balles sur le plancher et du trou dans le papier, à la suite de l'explosion, on aurait tous les éléments voulus pour déterminer la vitesse radiale.

II. — De l'influence de la rotation du projectile sur la dispersion.

Mise en équation.

Nous avons fait remarquer plus haut que la position des éléments matériels du projectile ne varie pas sensiblement dans le temps très-court qui sépare le moment où l'enveloppe se brise de celui où les vitesses introduites par la détente des gaz ont atteint leur maximum, ce qui caractérise la fin de l'explosion.

Fig. 2.



Soient (*fig.* 2), à ce dernier instant,

Ox' la position de l'axe de figure du projectile;

Oz la verticale d'un point quelconque O de Ox';

Ox l'horizontale du même point comprise dans le plan zOx';

Oy la perpendiculaire en O au plan ci-dessus;

Oz' la perpendiculaire dans le même plan à Ox';

i l'inclinaison de Ox' sur Ox;

G le centre de gravité du projectile;

V sa vitesse, que l'on peut supposer comprise dans le plan xOz, en négligeant ainsi sa composante parallèle à Oy, relativement très-petite, et qui donne lieu à la dérivation;

γ l'angle connu, peu différent de i, qu'elle forme avec Ox;

Ω la rotation qui a lieu autour de Ox', de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant Ox' en ayant les pieds en O;

m le centre de gravité d'un éclat ou d'une balle, par lequel nous ferons passer le plan zOy, et où nous supposerons concentrée la masse correspondante;

r la distance Om;

α l'angle mOz.

On peut négliger la vitesse due à la rotation autour de la parallèle à Oy menée au point G, et qui a produit le petit angle $VOx' = \gamma - i$.

La composante de la vitesse de m, dans le plan zOx, produite par l'explosion, étant très-petite par rapport à V, peut être négligée. L'autre composante, dirigée suivant Om d'après ce que l'on a vu plus haut, est de la forme μr, μ étant une constante.

La vitesse V donne les composantes

$$\begin{aligned} &V\cos\gamma \quad \text{suivant } Ox,\\ &V\sin\gamma \quad \text{suivant } Oz. \end{aligned}$$

La vitesse radiale μr donne de même les composantes

$$\begin{aligned} &\mu r\sin\alpha && \text{suivant } Oy,\\ &\mu z\cos\alpha && \text{suivant } Oz',\\ &-\mu r\cos\alpha\sin i && \text{suivant } Ox,\\ &\mu r\cos\alpha\cos i && \text{suivant } Oz. \end{aligned}$$

La rotation Ω se décompose en deux autres, $\Omega\cos i$ suivant Ox, $\Omega\sin i$ suivant Oz, qui donnent lieu aux vitesses

$$\begin{aligned} &\Omega r\sin i\sin\alpha && \text{suivant } Ox,\\ &\Omega r\cos i\cos\alpha && \text{suivant } Oy,\\ &-\Omega r\cos i\sin\alpha && \text{suivant } Oz. \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$(1)\qquad \begin{cases} \Omega \sin i = \omega', & V \sin \gamma = U', \quad a = \mu \cos i, \\ \Omega \cos i = \omega, & V \cos \gamma = U, \quad a' = \mu \sin i, \end{cases}$$

les composantes de la vitesse V de m après l'explosion suivant Ox, Oy, Oz sont

$$v_x = U + (\omega' \sin \alpha - a' \cos \alpha) r,$$
$$v_y = (a \sin \alpha + \omega \cos \alpha) r,$$
$$v_z = U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r.$$

En faisant abstraction de la résistance de l'air, les équations du mouvement de m, au bout du temps t après l'explosion, sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g,$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = U + (\omega' \sin \alpha - a' \cos \alpha) r,$$
$$\frac{dy}{dt} = (a \sin \alpha + \omega \cos \alpha) r,$$
$$\frac{dz}{dt} = U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r - gt;$$

et enfin, en négligeant les petites distances de m aux plans yOx, zOx, par rapport à celles que nous avons à considérer dans ce qui suit, nous avons

$$(2)\qquad \begin{cases} x = [U + (\omega' \sin \alpha - a' \cos \alpha) r] t, \\ y = (a \sin \alpha + \omega \cos \alpha) rt, \\ z = [U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r] t - \frac{gt^2}{2}; \end{cases}$$

d'où l'on déduit pour les équations de la trajectoire parabolique en

projection sur les plans zOy, zOx,

$$(3)\qquad z = \frac{U' + (a\cos\alpha - \omega\sin\alpha)r}{(a\sin\alpha + \omega\cos\alpha)r}\,y - \frac{g}{2}\,\frac{y^2}{(a\sin\alpha + \omega\cos\alpha)^2 r^2}.$$

$$(4)\qquad z = \frac{U' + (a\cos\alpha - \omega\sin\alpha)r}{U + (\omega'\sin\alpha - a'\cos\alpha)r}\,x + \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{[U + (\omega'\sin\alpha - a'\cos\alpha)r]^2}.$$

Supposons que le projectile se trouve à l'instant où l'explosion a lieu à une distance h au-dessus du niveau du sol; la position du point où la masse m tombera sera déterminée par les valeurs de x et y, résultant de l'hypothèse de $z = -h$ dans les équations précédentes, ce qui donne, en négligeant le terme $(\omega'\sin\alpha - a'\cos\alpha)r = (\Omega\sin\alpha - \mu\cos\alpha)r\sin i$, qui est très-petit, en raison de la faible valeur de i par rapport à $U = V\cos\gamma$ qui diffère peu de V,

$$(5)\qquad -h = \frac{U' + (a\cos\alpha - \omega\sin\alpha)r}{(a\sin\alpha + \omega\cos\alpha)r}\,y - \frac{g}{2}\,\frac{y^2}{(a\sin\alpha + \omega\cos\alpha)^2 r^2},$$

$$(5')\qquad -h = \frac{U' + (a\cos\alpha - \omega\sin\alpha)}{U}\,x - \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{U^2}.$$

Dispersion latérale.

L'équation (5) donne

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} g\frac{y}{r} = (a\sin\alpha + \omega\cos\alpha)\{&U' + (a\cos\alpha - \omega\sin\alpha)r \\ &+ \sqrt{[U' + (a\cos\alpha - \omega\sin\alpha)r]^2 + 2gh}\}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons pris le signe + pour le radical, parce que la racine doit être telle que, pour $h = 0$, on n'obtienne pas un résultat nul.

Si l'on pose

$$(7)\qquad \chi = a\cos\alpha - \omega\sin\alpha,$$

on a

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\chi}{d\alpha} = -\sin\alpha - \omega\cos\alpha, \\ \dfrac{d^2\chi}{d\alpha^2} = -\chi, \\ \dfrac{d\chi^2}{d\alpha^2} = a^2 + \omega^2 - \chi^2, \end{cases}$$

et l'équation (6) devient

$$(9)\qquad g\frac{\gamma}{r} = -\frac{d\chi}{d\alpha}\left[U' + r\chi + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}\right],$$

ou

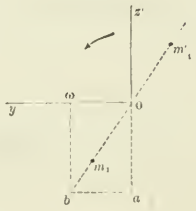
$$(9')\qquad g\frac{\gamma}{r} = \pm\sqrt{a^2 + \omega^2 - \chi^2}\left[U' + r\chi + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}\right].$$

Soient (*fig.* 3)

$O\omega$, Oa des longueurs égales à ω et a portées sur Oy et le prolongement de Oz;

Ob la diagonale du parallélogramme, construit sur ces deux longueurs;

Fig. 3.



m_1, m'_1 les intersections de Ob avec le cercle de rayon $Om = r$, situées au-dessous et au-dessus de Oy.

a n'est autre chose que la projection sur Oz' de l'extrémité de la longueur $O\mu = \mu$ portée à partir du point O sur Oz.

D'après l'équation (6), y est positif pour $\alpha = 0$; il faut donc prendre le signe + de l'expression (9'); y varie ensuite d'une manière continue quand α croît de zéro jusqu'à $z'Ob$, c'est-à-dire jusqu'à ce que m se trouve en m_1, position pour laquelle l'écart est nul; puis, cet écart devenant négatif, il faut prendre le signe — de cette dernière expression, jusqu'à ce que m se trouve en m'_1, puis, à partir de là, le signe + jusqu'à Oz'.

L'écart y atteint donc un maximum, par rapport à α, pour une position de m située dans la région $m'_1 z' m_1$, et un minimum dans l'autre région.

Les valeurs de χ, correspondant à m_1, m'_1, sont respectivement

$$-\sqrt{a^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2+\omega^2} = Ob.$$

Écart moyen des projectiles lancés d'un même côté du plan de tir. — Cet écart ne sera autre chose que l'intégrale $\int y\,d\alpha$, déduite de l'équation (9), divisée par $\frac{1}{2\sqrt{a^2+\omega^2}}$, et prise entre les limites $+\sqrt{a^2+\omega^2}$, et $-\sqrt{a^2+\omega^2}$. Cette équation donne

$$\begin{aligned} -\frac{g}{r}\int y\,d\alpha &= U'\chi + r\frac{\chi^2}{2} + \int\sqrt{(U'+r\chi)^2+2gh}\,.\,d\chi \\ &= U'\chi + r\frac{\chi^2}{2} - \frac{1}{8r}\left(w^2 + 8gh\log w - \frac{4g^2h^2}{w^2}\right), \end{aligned}$$

en posant

$$\sqrt{(U'+r\chi)^2+2gh} = (U'+r\chi) + w.$$

Mais la moyenne dont il s'agit est une fonction trop compliquée de a et ω pour que l'on puisse en tirer quelque connaissance utile : c'est pourquoi nous nous dispenserons de l'écrire.

Maximum et minimum de l'écart par rapport à α. — En égalant à zéro la dérivée de y par rapport à α, on a

$$\frac{d^2\chi}{d\alpha^2}\left[U'+r\chi+\sqrt{(U'+r\chi)^2+2gh}\right] + r\frac{d\chi^2}{d\alpha^2}\left(1+\frac{U'+r\chi}{\sqrt{(U'+r\chi)^2+2gh}}\right) = 0$$

ou

$$r\frac{d\chi^2}{dx^2} = \chi\sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh},$$

ou encore

$$(10) \qquad r(a^2 + \omega^2 - \chi^2) = \chi\sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh},$$

et enfin

$$(11) \quad 2U'r\chi^3 + \chi^2[U'^2 + 2gh + 2(a^2 + \omega^2)r^2] - (a^2 + \omega^2)r^2 = 0.$$

Cette équation a une racine positive et peut avoir, suivant les valeurs de ses coefficients, deux racines négatives ou deux racines imaginaires. Dans le premier cas, les racines négatives sont inadmissibles; car, d'après l'équation (10), si l'on admet une valeur négative pour χ, il faut qu'elle soit plus grande en valeur absolue que $\sqrt{a^2 + \omega^2}$; mais alors, d'après l'équation (9), y serait imaginaire.

La racine positive, portée dans la formule (9'), donnera pour y deux valeurs égales et de signes contraires, qui représenteront respectivement son maximum et son minimum.

Donc *les dispersions maximum de part et d'autre du plan de tir pour les éléments matériels, situés primitivement sur un même cercle, sont égales.*

Le maximum de l'écart pour un même cercle croît avec la vitesse angulaire.

En vertu de l'équation (10), la formule (9) peut se mettre sous la forme

$$(12) \quad y = \frac{1}{g}\sqrt{\chi r\sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}}\left[U' + r\chi + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}\right];$$

mais la même équation (10) donne

$$\frac{d\chi}{d\omega}\left[2\chi r + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh} + \frac{U' + r\chi}{\sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}}\right] = 2\omega r;$$

comme $\frac{d\chi}{d\omega}$ est positif, χ, par suite y, croît avec ω.

Le maximum de l'écart croît avec le rayon du cercle.

On déduit de l'équation (10)

$$r\chi\sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh} + r^2\chi^2 = r^2(a^2 + \omega^2),$$

et de là que $\frac{dr\chi}{dr}$ est positif, puis, en vertu de la formule (12), que y croît avec r.

Donc la dispersion maximum a lieu pour les éléments les plus éloignés de l'axe.

Maximum maximorum de l'écart.

Soient R le rayon moyen du projectile; Y l'écart maximum. Les équations (9') et (11) donnent

$$(13) \qquad Y = \frac{R}{g}\frac{\sqrt{a^2 + \omega^2 - \chi^2}}{\chi}\left[U'\chi + R(a^2 + \omega^2)\right],$$

$$(14) \qquad 2U'R\chi^3 + \chi^2\left[U'^2 + 2gh + 2(a^2 + \omega^2)R^2\right] - (a^2 + \omega^2)^2R^2 = 0.$$

D'après des règles connues, la racine positive de cette dernière équation est inférieure à la plus petite des quantités

$$1 + \sqrt[3]{\frac{(a^2 + \omega^2)^2 R}{2U'}},$$

$$1 + \frac{R^2(a^2 + \omega^2)^2}{2U'R + U'^2 + 2gh + 2(a^2 + \omega^2)R^2} = 1 + \frac{R^2(a^2 + \omega^2)^2}{(U' + R)^2 + 2gh + 2(a^2 + \omega^2 - \frac{1}{2})R^2}\,[*]$$

ainsi qu'à

$$\sqrt{\frac{a^2 + \omega^2}{2}};$$

comme on le reconnaît à l'inspection de l'équation.

[*] Règle de Biet.

La considération de ces limites facilitera notablement la résolution de l'équation (14) dans chaque cas particulier.

Influence de la vitesse radiale et de la rotation sur la portée des balles. — L'équation (5') donne

$$g\frac{x}{U} = U' + r\chi + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}.$$

Le maximum et le minimum de x correspondront respectivement au maximum $\sqrt{a^2 + \omega^2}$ et au minimum $-\sqrt{a^2 + \omega^2}$ de χ, c'est-à-dire aux points m'_1 et m_1. Ils sont ainsi augmentés et diminués par l'influence de ω.

La rotation a donc pour effet de favoriser la dispersion des balles parallèlement au plan de tir.

Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable (suite);

PAR M. CHARLES BRISSE,
Répétiteur à l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

V. DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE SPHÉRIQUE SUR LA SPHÈRE. — DÉPLACEMENT D'UN CORPS SOLIDE RETENU PAR UN POINT FIXE.

59. « *Quand une figure sphérique éprouve un déplacement fini quelconque sur la sphère, il existe toujours deux points de la figure, diamétralement opposés, qui se retrouvent, après le déplacement, dans leur position primitive, comme si la figure eût simplement tourné autour du diamètre qui joint ces points.* »

Il n'y a qu'à reproduire la démonstration du premier Mémoire en substituant aux droites des arcs de grand cercle.

60. « En d'autres termes :

» *Quand un corps retenu par un point fixe éprouve un déplacement fini quelconque, il existe toujours une certaine droite passant par le point fixe, qui après le déplacement se retrouve dans sa position primitive, comme si le corps avait éprouvé une simple rotation autour de cette droite restée fixe.*

» On peut encore dire que :

» *Quand deux corps égaux, placés d'une manière quelconque dans l'espace, ont un point commun (c'est-à dire un point qui, considéré comme appartenant à l'un des deux corps, soit lui-même son homologue dans l'autre), ils ont une infinité d'autres points communs situés tous sur une même droite.* »

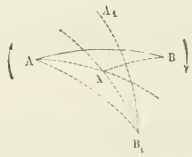
Composition de deux rotations d'un corps autour de deux axes qui se rencontrent.

61. « *Quand un corps retenu par un point fixe* O *éprouve deux rotations successives autour de deux axes* OA, OB, *dont le second est déplacé par la première rotation, l'axe* OX *de la rotation résultante (autour duquel il eût suffi de faire tourner le corps pour l'amener dans sa nouvelle position) fait avec* OA *et* OB *un angle trièdre tel, que des deux angles dièdres qui ont ces droites pour arêtes, le premier est égal à la demi-rotation autour de* OA, *et le second à la demi-rotation autour de* OB *prise en sens contraire.*

» *Quant à la rotation résultante (autour de* OX), *elle est égale au double du supplément de l'angle dièdre qui a* OX *pour arête dans l'angle trièdre.* »

Considérons une sphère de centre O et de rayon quelconque; soient A et B (*fig.* 27) les extrémités des axes. Par une première ro-

Fig. 27.



tation 2α, B vient en B_1; par une seconde rotation 2β de même sens, A vient en A_1, de sorte qu'en définitive AB est venu en A_1B_1. On aura l'axe de la rotation résultante OX, d'après ce qui a été dit, en menant deux arcs de grand cercle, l'un perpendiculaire à AA_1, l'autre à BB_1, qui seront tous deux bissecteurs des angles respectifs : la rotation totale a pour valeur BXB_1, elle est le double du supplément de AXB; BAX est égal à α et ABX à β en tournant en sens contraire.

62. « *Appelons* A, B, X *les trois angles dièdres; on a, entre ces*

angles et l'angle plan des deux axes OA, OB,

$$\cos X = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos(OA, OB).$$

Par conséquent, en appelant Ω *et* ω *les rotations autour de* OA *et* OB, *et* (Ω, ω) *l'angle de ces deux axes,*

$$\cos X = -\cos\tfrac{1}{2}\Omega \cos\tfrac{1}{2}\omega + \sin\tfrac{1}{2}\Omega \sin\tfrac{1}{2}\omega \cos(\Omega, \omega). \text{ »}$$

C'est la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique appliquée au triangle sphérique ABX.

« *Soit* U *la rotation résultante* (*autour de l'axe* X); *on a, comme il vient d'être dit,*

$$U = 2(180^\circ - X), \quad \text{ou} \quad X = 180^\circ - \tfrac{1}{2}U, \quad \cos X = -\cos\tfrac{1}{2}U.$$

Par suite,

$$\cos\tfrac{1}{2}U = \cos\tfrac{1}{2}\Omega \cos\tfrac{1}{2}\omega - \sin\tfrac{1}{2}\Omega \sin\tfrac{1}{2}\omega \cos(\Omega, \omega).$$

Telle est l'expression de la rotation résultante de deux rotations successives Ω, ω.

» *Si, dans le triangle sphérique* AXB, *on abaisse du sommet* X *sur le côté opposé* AB *un arc perpendiculaire* p, *on a, comme on sait,*

$$\sin X \sin p = \sin A \sin B \sin AB,$$

ou

$$\sin\tfrac{1}{2}U \sin p = \sin\tfrac{1}{2}\Omega \sin\tfrac{1}{2}\omega \sin(\Omega, \omega). \text{ »}$$

Le triangle rectangle ainsi formé nous donne

$$\sin p = \sin A \sin AX,$$

et la proportion des sinus appliquée au triangle ABX

$$\sin AX = \sin B \frac{\sin AB}{\sin X},$$

d'où résulte la formule indiquée.

VI. Déplacement d'un corps solide libre dans l'espace.

63. « *Quand deux corps égaux* V, V′ *sont placés d'une manière quelconque dans l'espace, par chaque point de l'un on peut mener une droite telle, que son homologue dans l'autre corps lui est parallèle et dirigée dans le même sens; toutes les droites ainsi menées sont parallèles entre elles.* »

On sait qu'on peut amener V en V′ par un mouvement hélicoïdal autour d'un certain axe XX′. Soient a et a' deux points correspondants; par ces deux points menons des parallèles à XX′, nous aurons les droites dont il est question.

64. « Il suit de là que :

» *Tout déplacement d'un corps solide dans l'espace peut s'effectuer d'une infinité de manières, au moyen d'une translation suivie d'une rotation autour d'une droite fixe.*

» *La translation est égale et parallèle au déplacement effectif d'un point du corps pris arbitrairement.*

65. » *Quand deux corps égaux sont placés d'une manière quelconque dans l'espace, il existe toujours une droite qui, considérée comme appartenant au premier corps, coïncide en direction avec son homologue dans le second corps.*

» Nous appellerons cette droite *axe central commun* aux deux corps.

66. » L'existence de cette droite forme la propriété la plus importante dans la théorie du déplacement d'un corps solide; elle donne lieu immédiatement à cette conséquence :

» *Tout déplacement d'un corps solide dans l'espace peut s'effectuer par une rotation autour d'une droite qui glisse sur elle-même.*

» Ce mouvement est semblable à celui d'une vis dans son écrou; par conséquent on peut dire que :

» *Tout déplacement d'un corps dans l'espace peut s'effectuer au moyen d'une vis à laquelle le corps serait fixé.*

» Nous verrons plus loin comment on détermine la position de l'axe et le pas de la vis, quand les positions que doivent prendre trois points du corps sont données.

» Lorsque nous considérerons deux corps égaux, au point de vue du déplacement de l'un d'eux, nous appellerons leur axe central commun *axe central de rotation*.

67. » *Les plans menés par l'axe central et par deux points homologues quelconques de deux corps égaux font entre eux un angle de grandeur constante et toujours dans le même sens de rotation;*

» *Et la projection orthogonale de la corde qui joint deux points homologues quelconques des deux corps, sur l'axe central, est de grandeur constante.*

» Cette projection, que nous désignerons par E, est la quantité de glissement de l'axe central sur lui-même; et l'angle constant formé autour de cet axe, que nous désignerons par U, exprime la rotation du corps autour de l'axe central.

68. » Si l'on considère dans deux corps égaux V, V′ deux droites homologues L, L′, on pourra, au moyen d'une rotation autour d'une certaine droite fixe λ, amener la droite L sur L′, de manière que les points homologues des deux droites coïncident (**47**); et ensuite, par une rotation autour de L′, faire coïncider les deux corps. Donc :

» *Tout déplacement d'un corps dans l'espace peut s'effectuer, d'une infinité de manières, au moyen de deux rotations successives autour de deux droites.*

» L'une de ces droites peut être prise arbitrairement; nous verrons plus loin comment l'autre se détermine, et comment on détermine aussi la grandeur des rotations à effectuer autour des deux droites. »

Des cordes qui joignent deux à deux les points homologues de deux corps égaux.

69. « *Si la corde* AA′, *qui joint deux points homologues* A, A′ *des deux corps* V, V′, *est considérée comme appartenant à l'un des deux*

corps, son homologue dans l'autre corps est aussi une corde, et ces deux droites se rencontrent.

» Réciproquement, *quand deux droites homologues se rencontrent, chacune d'elles est une corde.* »

Considérons AA′ comme appartenant au premier corps; l'homologue de A dans le second corps est A′, l'homologue de A′ est A″; la droite homologue de AA′ est A′A″ : c'est une corde, car A″ est dans le second corps l'homologue A′ du premier, et ces deux droites se rencontrent puisqu'elles ont A′ commun.

Soit A′ le point de rencontre de deux droites homologues L et L′; A′ considéré comme appartenant au second corps a pour homologue un point A du premier corps situé sur L; A′ considéré comme appartenant au premier corps a pour homologue un point A″ situé sur L′ : donc L et L′ sont des cordes.

70. « *La droite d'intersection de deux plans homologues* P, P′ *est toujours une corde.*

» Réciproquement, *par une corde on peut toujours mener deux plans homologues, et deux seulement.* »

Considérons D′, intersection des deux plans, comme appartenant au second corps : elle a pour homologue une droite D située sur P; soit *a* le point de rencontre de D et D′; *a* considéré comme appartenant au premier corps a pour homologue un point *a′* du second corps situé sur D′ : donc D′ est une corde.

Soit une corde D′, je la considère comme appartenant au second corps : elle a pour homologue dans le premier une droite D qui la rencontre (**69**); je la considère comme appartenant au premier : elle a pour homologue dans le second une droite D″ qui la rencontre : les plans DD′, D′D″ sont donc homologues, et ce sont les seuls.

71. « *Quand deux droites homologues se rencontrent, et sont par conséquent deux cordes* (**69**), *leur droite milieu est aussi une corde.* »

Soient A, A′, A″ les trois points que l'on connaît déjà; AA′ et A′A″ sont homologues; la droite milieu passe par le milieu de AA′ et de A′A″; mais ces milieux sont homologues : donc la droite milieu est une corde.

72. « *Quand deux cordes* AA′, BB′ *se rencontrent, les droites* AB, A′B′ *sont aussi des cordes.* »

De ce que AA′, BB′ se rencontrent, il résulte que AB et A′B′ se rencontrent aussi; mais ce sont des droites homologues : donc (**69**) ce sont des cordes.

73. « *Quand la droite d'intersection de deux plans homologues* P, P′ *rencontre la droite d'intersection de deux autres plans homologues* Q, Q′, *la droite d'intersection des deux plans* P, Q *et celle des deux plans* P′, Q′ *sont deux cordes.* »

La droite d'intersection des deux plans P, Q et celle des deux plans P′, Q′ sont deux droites homologues. La droite d'intersection des plans P, P′ et la droite d'intersection des plans Q, Q′ sont dans un même plan. La droite d'intersection des deux plans P, Q rencontre celle des deux plans P, P′, puisqu'elles sont toutes deux dans le plan P; elle rencontre aussi celles des plans Q, Q′ : elle est donc dans leur plan; on en dirait autant de l'intersection de P′, Q′ : donc nos droites homologues se rencontrent, donc (**69**) ce sont deux cordes.

74. « *Quand les cordes qui joignent deux à deux des points homologues de deux corps sont situées dans un même plan, elles enveloppent une parabole; et les points des deux corps auxquels appartiennent ces cordes sont situés sur deux droites tangentes à cette courbe.* »

Soient A, B, C, A′, B′, C′ des points des deux corps satisfaisant à la question; si A, B et C ne sont pas en ligne droite, ils déterminent un plan. Soit P ce plan, il a pour homologue le plan P′ des points A′, B′, C′, et, d'après l'énoncé, ces deux plans coïncident. Soit I le point de rencontre avec l'axe central, j'amène le premier corps sur le second par une rotation suivie d'une translation : dans la rotation I reste fixe, dans la translation il se déplace; donc P et P′ ne peuvent pas coïncider; donc les points dont il est question ne peuvent être qu'en ligne droite.

La droite des points A, B, C et celle des points A′, B′, C′ sont dans un même plan, elles sont d'ailleurs homologues : donc (**6**) les cordes qui joignent leurs points homologues enveloppent une parabole tangente aux droites ABC, A′B′C′.

On a vu que par une corde on peut toujours mener deux plans homologues et deux seulement : nous pourrons donc dire que, si l'on prend des plans du premier corps qui rencontrent leurs homologues du second suivant des droites situées dans un plan donné, toutes ces droites envelopperont une parabole.

75. « *Quand les cordes qui joignent deux à deux des points homologues des deux corps passent par un même point, ces cordes sont les arêtes d'un cône du second ordre; et les points des deux corps sont situés sur deux courbes à double courbure du troisième ordre.*

» *Toute droite menée par deux points de l'une de ces courbes est une corde.* »

J'ai démontré ce théorème dans mon premier Mémoire.

Soient M le point; A et B deux points de la première courbe du troisième ordre, A′ et B′ leurs homologues sur la seconde; AA′ et BB′ se rencontrent en M : donc AB et A′B′ se rencontrent; mais ce sont des droites homologues : donc ce sont des cordes.

Direction et grandeur d'une corde dont le point milieu est donné.

76. « Nous appellerons *corde relative* à un point la corde qui a ce point pour milieu.

» *La corde relative à un point est normale à la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe central.* »

Soient A et A′ deux points homologues, et α leur point milieu, AA′ est une corde du cylindre qui a pour axe l'axe central : donc le théorème est démontré.

77. « *Soit a le point milieu d'une corde* AA′, *on a, quant à la direction de cette corde, en appelant* X *l'axe central et r la distance du point a à cet axe,*

$$\operatorname{tang}(a\mathrm{A}, \mathrm{X}) = \frac{r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}};$$

et, quant à la grandeur de la corde,

$$\overline{a\mathrm{A}}^2 = r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \tfrac{1}{4}\mathrm{E}^2. \text{ »}$$

La *fig.* 28 donne

$$\operatorname{tang}(a\mathrm{A}, \mathrm{X}) = \frac{\mathrm{A}'\alpha}{\frac{1}{2}\mathrm{E}} = \frac{r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}},$$

et

$$\overline{a\mathrm{A}}^2 = r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \tfrac{1}{4}\mathrm{E}^2.$$

78. « Connaissant trois cordes quelconques AA′, BB′ et CC′, on détermine la corde relative à un point m, ainsi :

» *Soient a, b, c les milieux des trois cordes; on mène par ces points les plans normaux aux cordes respectives. Les traces des deux premiers*

Fig. 28.

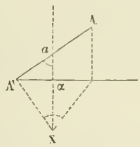
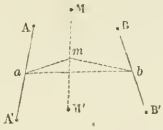


Fig. 29.



sur le plan mab se rencontrent en un point i par lequel passera le plan normal à la corde cherchée mené par son milieu m (**49**). *On détermine de même sur le plan mac un point i′ par lequel passera le même plan normal. Ce plan est donc déterminé, et, par suite, la corde cherchée* MM′ *l'est aussi, du moins en direction.*

» *Pour déterminer les deux points homologues* M, M′ *sur cette droite, on la considère comme appartenant au premier corps, et l'on cherche son homologue dans le second corps; celle-ci rencontrera la corde en son point* M′ *qui appartient au second corps; et, prenant sur la corde* $m\mathrm{M} = m\mathrm{M}'$, *on a le point* M *du premier corps.*

» Autrement : *Les projections orthogonales de la demi-corde* $m\mathrm{M}$ *sur les droites ma et mb sont égales à celles des demi-cordes* $a\mathrm{A}$, $b\mathrm{B}$ *sur ces mêmes droites, respectivement* (**46**, 3°). *D'où s'ensuit la détermination du point* M. »

Il suffit de regarder la *fig.* 29.

Propriétés relatives à deux droites homologues.

79. « *Deux droites homologues sont également éloignées de l'axe central, et font des angles égaux avec cet axe.* »

Soient L et L′ ces deux droites; j'amène L sur L′ par une rotation autour de l'axe central, qui n'altère ni l'angle ni la distance, et par une translation qui n'altère rien non plus : donc le théorème est démontré.

80. « *Par un point de l'espace on peut toujours mener deux droites homologues* D, D′. *Chacune de ces droites est une corde.*

» *La droite* D *appartenant à la première figure est la droite qui joint le point donné, considéré comme appartenant à la seconde figure, à son homologue dans la première figure; et la droite* D′ *de la seconde figure est celle qui joint le point donné, considéré comme appartenant à la première figure, à son homologue dans la deuxième figure.*

81. » *Si, par chaque point d'une droite* L, *on mène les deux droites homologues* D, D′ *qui se rencontrent en ce point, les droites* D *du premier corps forment un paraboloïde hyperbolique qui passe par la droite* L, *et par la droite qui correspond dans le premier corps à cette droite* L *considérée comme appartenant au second corps.* »

Soit a' le point où D rencontre L; a' considéré comme appartenant au second corps a pour homologue a du premier corps situé sur D et sur L_1 homologue de L dans le premier corps : donc la surface engendrée par D contient L_1; mais (**46**, 1°) les cordes, telles que aa', sont parallèles à un même plan : donc la surface est un paraboloïde hyperbolique.

« *Pareillement les droites* D′ *du second corps forment un paraboloïde qui passe par la droite* L *et par la droite qui correspond dans le second corps à cette droite* L *considérée comme appartenant au premier corps.*

» Cas particulier. — *Si la droite* L *est l'intersection de deux plans homologues, les deux droites homologues qu'on peut mener par chaque point de cette droite sont situées dans les deux plans, respectivement;*

et les deux paraboloïdes deviennent des paraboles situées dans ces deux plans (**74**). »

82. « *Si, par chaque point d'une droite quelconque* L, *on mène les deux droites homologues qui passent par ce point, lesquelles déterminent un plan :*

» 1° *Tous les plans ainsi déterminés enveloppent une développable du quatrième ordre ;*

» 2° *Par un point quelconque on peut mener trois plans tangents à cette surface ;*

» 3° *Chacun de ces plans coupe la surface suivant une parabole.* »

Considérons L (*fig.* 30) comme appartenant à la seconde figure, elle aura pour homologue dans la première L_1, et, considérée comme

Fig. 30.

appartenant à la première, elle aura pour homologue dans la seconde L_2. Soient a, a_1, a_2 trois points correspondants; le paraboloïde de LL_2 n'est autre que le paraboloïde de LL_1, qui a tourné d'un certain angle autour de λ (**46**, 4°); la droite aa_2 est l'intersection de deux plans homologues.

On sait par les propriétés des surfaces du second ordre que les plans, tels que a_1aa_2, enveloppent une développable du quatrième degré, à laquelle on ne peut mener que trois plans tangents par un point, et que chacun de ces plans la coupe suivant une parabole.

83. « Cas particulier. — Si la droite L est l'intersection de deux plans homologues, le théorème prend cet énoncé :

» *Si, par chaque point de la droite d'intersection* L *de deux plans homologues, on mène deux droites homologues, lesquelles sont situées dans*

ces plans, respectivement (**81**), *et enveloppent deux paraboles tangentes à la droite* L, *le plan de deux droites enveloppe une développable du quatrième ordre.* »

Voir les n^os^ **55** et **56**.

84. « *Par chacune des cordes qui joignent les points homologues de deux droites homologues* L, L′ *passent deux plans homologues :*

» 1° *Ces plans enveloppent deux développables du quatrième ordre;*

» 2° *La droite d'intersection de deux de ces plans, appartenant à un même corps, est une corde.* »

Voir le n° **82**.

85. « *Si, autour de deux droites homologues* L, L′, *on fait tourner deux plans homologues, leur droite d'intersection engendre un hyperboloïde.* »

En effet, les deux faisceaux de plans sont homographiques, L et L′ sont deux génératrices de l'autre système.

« Cas particulier. — *Si les deux droites homologues* L, L′ *se rencontrent, la droite d'intersection des deux plans homologues décrit un cône du second ordre.*

86. » *Quand deux plans homologues doivent avoir leur droite d'intersection sur un plan fixe :*

» 1° *Cette droite enveloppe une parabole;*

» 2° *Les deux plans enveloppent deux développables du quatrième ordre.* »

On a vu (**70**) que la droite d'intersection de deux plans homologues est une corde, (**74**) que les cordes situées dans un plan enveloppent une parabole.

Si l'on suppose (**82**) que L et L_2 tournent jusqu'à être dans un même plan, aa_2 devient la droite dont il est ici question, et les deux plans enveloppent deux développables du quatrième ordre.

87. « *Il existe toujours dans un plan quelconque* Q *deux droites homologues* D, D′. *Chacune de ces droites est une corde.*

» *La droite* D *appartenant à la première figure est l'intersection du*

plan Q, *considéré comme appartenant à la seconde figure, par son homologue dans la première figure; et la droite* D′ *de la seconde figure est l'intersection du même plan* Q, *considéré comme appartenant à la première figure, par son homologue dans la seconde figure.* »

Ces deux droites homologues se rencontrent : donc (69) chacune d'elles est une corde.

88. « *Quand plusieurs plans passent par une même droite* L, *il existe dans chacun d'eux un système de deux droites homologues* D, D′ *appartenant respectivement aux deux corps :*

» 1° *Les droites* D *du premier corps forment un hyperboloïde, et les droites* D′ *du second corps un second hyperboloïde;*

» 2° *Les deux droites homologues* D, D′ *contenues dans chaque plan se rencontrent en un point; et le lieu de tous ces points est une courbe à double courbure du troisième ordre;*

» 3° *Par une droite quelconque on peut mener quatre plans tangents à cette courbe, de sorte que la développable dont cette courbe est l'arête de rebroussement est du quatrième ordre.* »

Soit P un plan passant par L; soient L_1 la position correspondant à L dans la première figure, et P_1 la position correspondant à P; P_1 passe par L_1; mais D est l'intersection de P et de P_1 : on retombe donc sur le n° 85.

Soit L_2 la position correspondant à L dans la seconde figure; l'hyperboloïde des droites D passe par L et L_1, celui des droites D′ par L et L_2: ces deux surfaces ayant une génératrice commune se coupent donc suivant une courbe du troisième ordre, lieu des points de rencontre des droites D et D′.

On sait qu'à cette courbe du troisième ordre on ne peut mener que quatre plans tangents par une droite. Or, quand un plan sera tangent, il contiendra une caractéristique de la surface : il n'y a donc que quatre caractéristiques qui rencontrent la droite; en d'autres termes, la droite ne rencontre la surface qu'en quatre points : donc le théorème est démontré.

« Observation. — *Si la droite* L *est une corde, les deux hyperboloïdes deviennent des cônes du second ordre.* »

En effet, dans ce cas, L et L_1 se rencontrent en un point, et l'intersection de P et P_1 passe par ce point.

89. « *Si, autour de deux points homologues, on fait tourner deux droites homologues* D, D′, *qui se rencontrent :*

» 1° *Chacune des deux droites décrit un cône du second ordre;*

» 2° *Leur point de rencontre décrit une courbe à double courbure du troisième ordre;*

» 3° *Toute droite qui s'appuie en deux points sur cette courbe est une corde.* »

Soient a_1, a_2 deux points homologues; alors a_1a_2 est une corde, et l'on retombe sur l'observation du n° **88**.

Ces deux cônes ayant une génératrice commune a_1a_2, le reste de l'intersection qui est le lieu cherché est une courbe à double courbure du troisième ordre.

Enfin il n'y a qu'à se reporter au n° **75** pour la dernière partie de l'énoncé.

90. « *Si, autour de deux points homologues, on fait tourner deux plans homologues, leur droite d'intersection s'appuie, dans toutes ses positions, en deux points (réels ou imaginaires), sur la courbe à double courbure du troisième ordre, lieu des points d'intersection des droites homologues tournant autour des deux points fixes.* »

Soient a_1, a_2 les deux points; menons deux plans homologues P_1, P_2; il s'agit de chercher combien il y a de droites homologues issues de a_1 qui rencontrent celles issues de a_2 en des points situés sur l'intersection de P_1 et P_2. Or toutes les droites issues de a_1 qui rencontrent celles issues de a_2 sont (**89**) sur un cône du second degré : donc il n'y en a que deux, et les deux points ainsi obtenus sont sur la courbe du troisième ordre.

« Réciproquement : *Toute droite qui s'appuie en deux points sur cette courbe est l'intersection de deux plans homologues qui passent, respectivement, par les deux points fixes.* »

Car ces plans contiennent, respectivement, deux droites homologues.

91. « *Quand deux plans homologues tournent autour de deux*

droites homologues, leur droite d'intersection est une corde, et les deux points homologues situés sur cette droite sont sur deux courbes à double courbure du troisième ordre. »

La droite d'intersection de deux plans homologues (**70**) est toujours une corde. De plus (**88**, 2°), si D est cette intersection, D_1 son homologue dans la première figure, ces droites sont les seules dans le plan mené par une des droites, celle de la *première figure; donc leur point de rencontre est une courbe à double courbure du troisième ordre.*

92. « *Angle de deux droites homologues* D, D′ :

$$\sin\tfrac{1}{2}(D, D') = \sin\tfrac{1}{2}U \sin(D, X). \text{ »}$$

Je mène par un point O (*fig.* 31) de l'axe central des parallèles à D et à D′, et je prends OD = OD′, ID est perpendiculaire à OX. On a

$$ID = OD \sin(D, X), \quad \tfrac{1}{2}DD' = ID \sin\tfrac{1}{2}U = OD \sin\tfrac{1}{2}(D, D'),$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}(D, D') = \sin\tfrac{1}{2}U \sin(D, X).$$

93. « *Angle qu'un plan parallèle à deux droites homologues* D, D′ *fait avec l'axe central :*

$$\operatorname{tang}(\overline{DD'}, X) = \cos\tfrac{1}{2}U \operatorname{tang}(D, X). \text{ »}$$

On a (*fig.* 31)

$$\operatorname{tang}(\overline{DD'}, X) = \frac{IK}{IO} = \frac{ID\cos\frac{1}{2}U}{OD\cos(D, X)} = \cos\tfrac{1}{2}U \operatorname{tang}(D, X).$$

94. « *Direction dans l'espace d'un plan parallèle à deux droites homologues.*

» *La trace d'un tel plan sur un plan* H, *perpendiculaire à l'axe central, est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle que font les projections sur le plan* H *des droites qui mesurent les plus courtes distances de l'axe central aux deux droites homologues.* »

Les plus courtes distances sont en projection perpendiculaires à ID

et à ID′ et leur bissectrice est perpendiculaire à IK : donc le théorème est démontré.

« Cette trace et l'angle que le plan demandé fait avec l'axe central (93) déterminent la direction de ce plan.

95. » *Plus courte distance de deux droites homologues* D, D′.

» La droite D est déterminée de position par sa plus courte distance r à l'axe central, et par l'angle (D, X) qu'elle fait avec cet axe. Soit γ sa plus courte distance à la droite homologue D′; on a

$$\gamma = \frac{2r\sin\frac{1}{2}U + E\cos\frac{1}{2}U\,\mathrm{tang}(D, X)}{\sqrt{1 + \mathrm{tang}^2(D,X)\cos^2\frac{1}{2}U}}. \text{ »}$$

Je ne fais d'abord subir à D que la rotation; soient alors T et T′

Fig. 31.

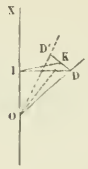
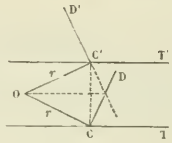


Fig. 32.



(*fig.* 32) les traces de deux plans parallèles à D et à D′ menés respectivement par chacune de ces droites, on a

$$CC' = 2r\sin\tfrac{1}{2}U.$$

J'abaisse maintenant T′ parallèlement à lui-même de la quantité E; T′ se déplace de manière que CC′ augmente d'une quantité C′C″, telle que

$$\frac{C'C''}{E} = \mathrm{tang}(\overline{DD'}, X), \quad C'C'' = E\,\mathrm{tang}(\overline{DD'}, X),$$

d'où

$$CC'' = 2r\sin\tfrac{1}{2}U + E\cos\tfrac{1}{2}U\,\mathrm{tang}(D, X).$$

Soit γ la plus courte distance des deux plans; on a

$$\gamma = CC'' \cos(\overline{DD'}, X),$$

d'où

$$\gamma = \frac{2r \sin\frac{1}{2}U + E\cos\frac{1}{2}U \operatorname{tang}(D, X)}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2(D, X)\cos^2\frac{1}{2}U}}.$$

« Le numérateur du second membre exprime la distance de deux droites parallèles, lesquelles sont les traces, sur un plan perpendiculaire à l'axe central, des deux plans menés par les deux droites D, D′ parallèlement à ces droites; et le dénominateur est le sinus de l'inclinaison de ces plans sur le plan perpendiculaire à l'axe central.

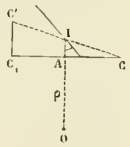
96. » *Projection orthogonale d'une corde* AA′, *qui joint les points homologues des deux droites* D, D′ *sur la droite milieu* A :

$$2\rho \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U \sin(A, X) + E\cos(A, X),$$

ρ *étant la distance de la droite milieu* A *à l'axe central.* »

Soit C (*fig.* 33) le pied de la plus courte distance de D et de X; toutes les cordes (**46**, 3°) ont même projection sur A. Considérons, par

Fig. 33.



exemple, CC′. La droite milieu A passe par le milieu I de CC′, elle est d'ailleurs dans un plan parallèle à D et D′; par conséquent, $\rho = OA$ est sa plus courte distance à l'axe. Au lieu de projeter CC′, projetons le contour CC_1C', nous aurons

$$CC_1 \sin(A, X) + C_1C' \cos(A, X);$$

mais

$$\frac{CA}{\rho} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U, \quad CC_1 = 2\rho \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U, \quad C_1C' = E,$$

d'où

$$2\rho \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U \sin(A, X) + E\cos(A, X).$$

Propriétés relatives à deux plans homologues.

97. « *Deux plans homologues font des angles égaux avec l'axe central, et le segment qu'ils interceptent sur cet axe est de grandeur constante et égal au glissement de cet axe sur lui-même.* »

Cela est évident.

98. « On a vu que la droite d'intersection de deux plans homologues est une corde; et, réciproquement, que par une corde AA′ on peut toujours mener un système de deux plans homologues, et un seul (**70**).

» Il existe entre la corde et les deux plans cette relation :

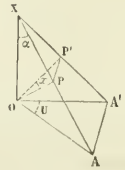
» *Le produit d'une corde par la tangente du demi-angle des deux plans homologues dont cette corde est l'intersection est constant.*

» *De sorte qu'on a*

$$AA' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P, P') = E \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U. \text{ »}$$

Je mène par un point de l'axe X (*fig.* 34) des plans parallèles aux

Fig. 34.



deux plans homologues : XA et XA′ sont leurs lignes de plus grande pente; j'abaisse d'un point O quelconque les perpendiculaires OP et OP′, et j'ai

$$\overline{PP'}^2 = 2\overline{OP}^2(1 - \cos x), \quad \overline{AA'}^2 = 2\overline{OA}^2(1 - \cos U),$$

$$\left(\frac{PP'}{AA'}\right)^2 = \left(\frac{OP}{OA}\right)^2 \frac{1 - \cos x}{1 - \cos U} = \left(\frac{XP}{XA}\right)^2, \quad \left(\frac{XP}{OP}\,\frac{OA}{XA}\right)^2 = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos U} = \cos^2\alpha.$$

Soit D l'intersection des deux plans, D′ son homologue dans la seconde figure; un de nos plans est parallèle à ces deux droites homologues : donc (93)

$$\operatorname{tang}\alpha = \cos\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\operatorname{tang}(\mathrm{D}, \mathrm{X});$$

mais (77)

$$\operatorname{tang}(\mathrm{D}, \mathrm{X}) = \frac{r\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{r\sin\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}}, \quad \cos^2\alpha = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{E}^2}{\frac{1}{4}\mathrm{E}^2 + r^2\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{U}}.$$

On a

$$1 - \cos x = \frac{2\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2\frac{x}{2}}, \quad 1 - \cos\mathrm{U} = \frac{2\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\mathrm{U}}{1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\mathrm{U}},$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\mathrm{U}}{1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\mathrm{U}}\,\frac{\frac{1}{4}\mathrm{E}^2}{\frac{1}{4}\mathrm{E}^2 + r^2\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{U}},$$

et enfin

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{E}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\sqrt{r^2\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\mathrm{U} + \frac{1}{4}\mathrm{E}^2}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}, \mathrm{P}').$$

Mais on a (77)

$$\overline{a\mathrm{A}}^2 = r^2\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \tfrac{1}{4}\mathrm{E}^2, \quad \overline{\mathrm{AA}'}^2 = 4(r^2\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \tfrac{1}{4}\mathrm{E}^2),$$

d'où

$$\mathrm{AA}'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = \mathrm{E}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}.$$

« Corollaire. — On conclut de là que : *Le plus grand angle que puissent faire entre eux deux plans correspondants a lieu quand ces plans passent par l'axe central.* »

Cela se conclut plus naturellement de l'expression de $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ que de la dernière égalité; car alors, r étant nul, AA′ passe par l'axe, et en outre, d'après l'expression de tang (D, X), se confond avec lui : donc les deux plans passent par l'axe.

99. « *Angle de deux plans homologues, en fonction de la distance de leur droite d'intersection à l'axe central.*

» Soit r cette distance; il suffit de remplacer AA', dans l'expression précédente, par son expression en fonction de r (**77**); il vient

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = \frac{\tfrac{1}{2}\mathrm{E}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}}{\sqrt{r^2\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \tfrac{1}{4}\mathrm{E}^2}}. \text{ »}$$

Cette expression a été trouvée directement au numéro précédent.

100. « *Angle de deux plans homologues en fonction de leur inclinaison sur l'axe central :*

$$\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = \sin\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\cos(\mathrm{P}, \mathrm{X}). \text{ »}$$

On a (**98**)

$$\frac{1 - \cos x}{1 - \cos \mathrm{U}} = \cos^2\alpha,$$

ou

$$\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{\mathrm{U}}{2}} = \cos^2\alpha, \quad \sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = \sin\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\cos(\mathrm{P}, \mathrm{X}).$$

101. « *Relation entre l'inclinaison de deux plans homologues sur l'axe central et la distance de leur droite d'intersection à cet axe :*

$$r\operatorname{tang}(\mathrm{P}, \mathrm{X})\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{U} = \frac{\mathrm{E}}{2}. \text{ »}$$

On a (**98**)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{r\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{U}}{\tfrac{1}{2}\mathrm{E}},$$

d'où

$$r\cot(\mathrm{P}, \mathrm{X})\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{U} = \tfrac{1}{2}\mathrm{E}.$$

102. « *Si, autour de deux droites homologues* L, L', *on fait tourner deux plans homologues* P, P' :

» 1° *La droite d'intersection de ces deux plans est une corde* (**70**) *et engendre un hyperboloïde* (**85**);

» 2° *Les deux points homologues* A, A' *des deux corps, situés sur cette*

corde, décrivent deux courbes à double courbure du troisième ordre (**91**);

» 3° *Le point milieu a de la corde* AA′ *décrit aussi une courbe à double courbure du troisième ordre;*

» 4° *Le plan normal à cette corde, mené par son milieu a, enveloppe une développable du quatrième ordre.* »

Nous démontrerons plus loin que le corps milieu est homographique au corps donné, d'où il résulte que le lieu du point *a* est homographique au lieu du point A : donc il ne peut être coupé par un plan en plus de trois points; donc c'est une courbe à double courbure du troisième ordre.

Le plan normal à la corde AA′, mené par son milieu, enveloppe une développable corrélative de la courbe du troisième ordre, c'est-à-dire une développable du quatrième ordre.

103. « *Quand des plans du premier corps rencontrent leurs homologues du second corps, suivant des droites situées dans un même plan quelconque :*

» 1° *Ces plans enveloppent une développable du quatrième ordre* (**86**);

» 2° *Leurs foyers sont sur une courbe à double courbure du troisième ordre;*

» 3° *Les normales à ces plans, menées par leurs foyers, forment un cône du second ordre.* »

La suite des foyers de la première série de plans forme une courbe à chacun des points de laquelle correspond un plan. La courbe en question a donc pour corrélative une développable du quatrième ordre : donc elle est une courbe à double courbure du troisième ordre.

Soient Q le plan sur lequel sont les intersections des plans homologues, P l'un de ces plans, F son foyer. Le plan P coupe le plan Q suivant une droite L, et a pour normale en F une droite N : donc à la droite N passant par F correspond la droite L située dans le plan P, donc la figure formée par la droite N est corrélative de celle formée par la droite L. Or toutes celles-ci sont dans un même plan : donc toutes les autres passent par un même point, donc elles forment un cône.

Le plan Q est tangent à la développable : donc son foyer, qui lui correspond, et qui est le sommet du cône, est sur la courbe du troisième ordre, donc le cône est du second ordre.

Corps milieu relatif à deux corps égaux.

104. « Les milieux des cordes AA′, BB′,... qui joignent les points homologues des deux corps V, V′ forment un troisième corps que nous appellerons *corps milieu* relatif aux deux corps égaux V, V′.

» *Ce corps milieu est homographique à chacun des deux corps* V, V′. »

A chaque point du corps V correspond un point du corps milieu, et à chaque plan du corps V (**49**) correspond un plan du corps milieu : donc les deux corps sont homographiques.

105. « *On peut donner au corps milieu relatif à deux corps égaux* V, V′ *un mouvement infiniment petit dans lequel ses points a, b,... auront leurs trajectoires dirigées suivant les cordes* AA′, BB′,... *dont ces points sont les milieux;*

» *L'axe de rotation qui glisse sur lui-même, dans ce mouvement infiniment petit, est l'axe central commun aux deux corps* V, V′;

» *Et le rapport entre la rotation* ω *autour de cet axe et sa translation h est*

$$\frac{\omega}{h} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}U}{\frac{1}{2}E};$$

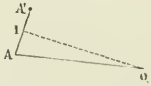
de sorte qu'on a

$$\omega = \varepsilon \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U \quad \textit{et} \quad h = \varepsilon\tfrac{1}{2}E,$$

ε *étant une constante infiniment petite prise arbitrairement.* »

Projetons sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis; le milieu de la droite qui joint deux points homologues dans l'espace se projettera

Fig. 35.



en I (*fig.* 35), milieu de AA′. IO étant perpendiculaire à AA′, les directions des déplacements sont bien perpendiculaires aux rayons vec-

teurs. Toutes les hélices décrites dans le déplacement infiniment petit doivent avoir même pas. Or les droites données sont des tangentes à ces hélices, et l'on sait que l'inclinaison d'une tangente sur l'horizon est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{h}{2\pi r}.$$

L'inclinaison est ici

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{OA}\sin\omega};$$

mais

$$\mathrm{OI} = \mathrm{OA}\cos\omega = r:$$

donc

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\varepsilon}{2r\operatorname{tang}\omega} = \frac{\frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{tang}\omega}}{2\pi r}.$$

Le pas étant égal à $\frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{tang}\omega}$ est donc constant, et par suite le déplacement indiqué est possible.

Dans la notation de l'énoncé, une élévation h correspond à une rotation ω; ici une élévation $\frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{tang}\omega}$ correspond à une rotation 2π : on a donc

$$\frac{\omega}{h} = \frac{2\pi}{\frac{\pi\mathrm{E}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}}, \quad \frac{\omega}{h} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}}.$$

On peut donc écrire

$$\omega = \varepsilon\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}, \quad h = \varepsilon\tfrac{1}{2}\mathrm{E},$$

ε étant une constante arbitraire infiniment petite.

106. « *L'élément aa' que décrit, dans le mouvement infiniment petit, chaque point a du corps milieu, est à la demi-corde $a\mathrm{A}$ $\left(=\frac{\mathrm{AA}'}{2}\right)$ dans le rapport constant ε.*

» *Ainsi*

$$aa' = \varepsilon . a\mathrm{A} = \varepsilon\frac{\mathrm{AA}'}{2},$$

ou

$$\frac{aa'}{\mathrm{AA}'} = \frac{h}{\mathrm{E}}.$$

» *Il résulte de là, d'après l'expression de* AA′ (**77**), *que*

$$aa' = \frac{h}{\frac{1}{2}\mathrm{E}}\sqrt{r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \frac{\mathrm{E}^2}{4}},$$

r étant la plus courte distance de la corde AA′ *à l'axe central.* »

aa' et $a\mathrm{A}$, étant sur la même droite, sont entre elles comme leurs projections h et $\frac{1}{2}\mathrm{E}$ sur l'axe central : on a donc

$$\frac{aa'}{a\mathrm{A}} = \frac{h}{\frac{1}{2}\mathrm{E}} = \varepsilon, \quad aa' = \varepsilon . a\mathrm{A} = \varepsilon\,\frac{\mathrm{AA}'}{2}, \quad \frac{aa'}{\mathrm{AA}'} = \frac{h}{\mathrm{E}};$$

et, en remplaçant dans $4\overline{a\mathrm{A}}^2$, il vient

$$aa' = \frac{h}{\frac{1}{2}\mathrm{E}}\sqrt{r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \frac{\mathrm{E}^2}{4}}.$$

107. « La notion de ce corps milieu, qui peut prendre un mouvement infiniment petit dans lequel ses trajectoires sont dirigées suivant les cordes dont les points de ce corps sont les milieux, conduit à de nombreuses propriétés relatives au déplacement fini d'un corps dans l'espace; ces propriétés se concluent de celles du déplacement infiniment petit, question plus facile à traiter.

108. » *Soient deux droites homologues* L, L′ *et leur droite milieu* Λ; *les plans, menés par les différents points de cette droite* Λ *normalement aux cordes qui ont leurs milieux en ces points, passent tous par une même droite* λ (**46**).

» *Cette droite* λ *et la droite milieu* Λ *sont deux axes conjugués de rotation dans le mouvement infiniment petit du corps milieu.* »

En effet, ces deux droites sont conjuguées : il n'y a alors qu'à se reporter au n° **6** du premier Mémoire.

109. « Il résulte de là que :

» *Si la droite* λ *est regardée comme droite milieu de deux droites homologues* l, l', *les plans menés par ses différents points, normalement aux cordes qui ont leurs milieux en ces points, passeront tous par la droite* Λ. »

Car λ et Λ sont deux droites conjuguées. Il suffit de prouver qu'on peut trouver deux droites telles que l et l'. Or prenons deux plans homologues P et P′ et leur plan milieu Π, il coupera λ en un point qu'on reliera par des sécantes aux milieux a, b, c, relatifs à trois points A, B, C du plan P, ce qui permettra de trouver son correspondant sur P et sur P′ : on aura donc un point de l et de l', on en cherchera un second, et l et l' seront déterminées.

110. « Ainsi les deux droites Λ et λ, que l'on a à considérer dans le déplacement fini d'un corps, jouissent de propriétés réciproques.

» Nous reviendrons plus loin (**122** et suiv.) sur les propriétés auxquelles ces deux droites donnent lieu.

111. » *Dans un plan donné* Π *se trouvent deux droites homologues* L, L′ *et un point* F *autour duquel on peut faire tourner une des droites pour l'amener sur l'autre. Ce point* F *est le foyer du plan* (**49**).

» *Si l'on considère le plan* Π *comme plan milieu relatif à deux plans homologues* P, P′, *le point* F *sera le foyer de ce plan dans le mouvement infiniment petit que peut prendre le corps milieu* [*].

Car la droite AA′ qui passe par ce point a la direction de l'élément aa', et est perpendiculaire au plan Π.

112. » *Les droites homologues* L, L′, *situées dans le plan* Π, *sont les intersections de ce plan par les deux plans homologues* P, P′ (**50**).

» *La caractéristique du plan* Π, *dans le mouvement infiniment petit* [**], *est la droite milieu* Λ *des deux droites* L, L′. »

Car les cordes correspondant aux points de ces droites sont situées dans le plan Π.

113. « La perpendiculaire abaissée du foyer du plan Π sur cette droite milieu passe par le point de concours des deux droites L, L′. Or,

---

[*] « *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.* (Voir *Comptes rendus*, t. XVI, p. 1420, année 1843.) »

[**] « *Ibid.* »

si l'on considère le mouvement infiniment petit, cette perpendiculaire passe par l'axe central de rotation. Donc, en général :

» *La droite qui joint le foyer d'un plan au point de concours des deux droites homologues situées dans ce plan rencontre l'axe central et lui est perpendiculaire.* »

Pour la première partie, il n'y a qu'à se reporter à (**49**, 2°), et pour la deuxième au premier Mémoire (**4**) : on conclut alors la troisième.

Il reste seulement à faire voir que, par les droites homologues, on peut mener des plans homologues ayant pour plan milieu le plan donné, ce qui n'offre aucune difficulté.

114. « *Tous les plans* Π *menés par une droite donnée* D *ont leurs foyers sur une même droite.* »

C'est le théorème des droites conjuguées, démontré dans le premier Mémoire (**5**).

115. « *Les droites homologues situées dans chacun de ces plans forment deux hyperboloïdes, et leur point d'intersection décrit une courbe à double courbure du troisième ordre.* »

On a démontré (premier Mémoire, n° **14**) que, si plusieurs plans passent par une même droite, leurs caractéristiques forment un hyperboloïde à une nappe, et (**112**) que la caractéristique du plan Π est la droite milieu des deux droites L et L′ ; donc toutes ces droites milieu forment un hyperboloïde qui appartient au corps milieu. Or (**104**) le corps milieu est homographique aux deux autres, dont les droites L et les droites L′ forment deux hyperboloïdes. Toutes ces droites rencontrant la droite D autour de laquelle pivotent les plans Π, cette droite fait partie des deux hyperboloïdes : donc le reste de leur intersection ou le lieu des points d'intersection des droites L et L′ décrit une courbe à double courbure du troisième ordre.

116. « *Les points où ces droites sont rencontrées par leur droite milieu décrivent aussi deux courbes à double courbure du troisième ordre.* »

Car les droites milieu forment un hyperboloïde qui admet aussi D pour génératrice.

117. « *Tous les plans menés par un même point* O *ont leurs foyers sur un même plan; ce plan passe par ce point* O *et est perpendiculaire à la corde dont ce point est le milieu.* »

En effet leurs foyers sont sur le plan normal à la trajectoire du point. Le point ayant sa trajectoire normale au plan est le foyer du plan.

118. « *Quand la corde qui a son milieu en un point d'une droite donnée* D *est perpendiculaire à cette droite, toutes les autres cordes qui ont leur milieu en d'autres points de la droite sont aussi perpendiculaires à cette droite.* »

Toutes les autres cordes qui ont leurs milieux en des points de D ont pour extrémités deux droites L et L′, d'après les propriétés du corps milieu; on retombe donc sur le n° **48**.

Propriétés relatives au système de deux rotations conjuguées.

119. « Le déplacement d'un corps V, que l'on veut transporter en V′, peut se faire, comme nous l'avons vu (**68**), par deux rotations successives autour des deux droites différentes λ et L, dont une est prise arbitrairement. La première rotation, autour de λ, amène la droite L du corps sur son homologue L′, c'est-à-dire dans sa position définitive, et la seconde rotation, qui se fait autour de cette droite L ainsi placée en L′, fait coïncider les deux corps.

» Ce sont les rotations autour de ces deux droites λ et L que nous appellerons *rotations conjuguées*, et ces deux droites seront dites *axes conjugués de rotation*.

120. » Voici comment on détermine une de ces droites quand l'autre est donnée :

» 1° *Si la droite* L *est donnée, ainsi que son homologue* L′ *sur laquelle on doit l'amener, soit* Λ *leur droite milieu : les plans menés par les points de cette droite normalement aux cordes* AA′, BB′, ..., *qui ont leurs milieux en ces points, passent tous par une même droite* λ *qui est la droite cherchée.* »

Cela résulte de (**46**, 6°).

« 2° *Si c'est la droite* λ *qui est donnée, on mène par deux de ses points les plans normaux aux cordes qui ont leurs milieux en ces points; la droite d'intersection de ces plans est la droite milieu* Λ *des deux droites* L, L'. *Celles-ci seront donc déterminées.*

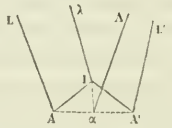
» Cela résulte de la considération du corps milieu relatif aux deux corps V, V' et du mouvement infiniment petit que l'on peut donner à ce corps, comme il a été dit (**105**). Dans ce mouvement infiniment petit, les deux droites λ et Λ sont deux axes conjugués de rotation (**120**). »

Cela résulte aussi du n° **109**.

121. « *La projection orthogonale de la droite qui mesure la plus courte distance des deux axes conjugués* L *et* λ *sur l'axe central est de grandeur constante et égale à la demi-translation de cet axe sur lui-même.* »

On a vu (**108**) que dans le mouvement infiniment petit du corps milieu, où les trajectoires des points de Λ (*fig.* 36) seraient dirigées

Fig. 36.



suivant AA',..., les droites λ et Λ sont conjuguées, et (**105**) que l'axe de rotation glissant, dans ce mouvement, est l'axe central commun aux deux corps. On sait (**46**, 5°) que $I\alpha$ est la plus courte distance de λ et Λ, et (premier Mémoire, n° **9**) que cette plus courte distance est perpendiculaire à l'axe central. La projection de $A\alpha = \frac{1}{2}AA'$ sur l'axe central est, d'une part, $\frac{1}{2}E$; elle est, d'autre part, égale à la projection du contour $AI\alpha$, qui se réduit ainsi à la projection de AI, ce qui démontre le théorème.

122. « *Si l'une des deux droites conjuguées* Λ, λ *tourne autour d'un point fixe, l'autre se meut dans le plan normal à la trajectoire de ce point.* (*Comptes rendus*, t. XVI, p. 1423.)

» On en conclut que :

» *Si l'un des axes conjugués* L *et* λ *tourne autour d'un point fixe, l'autre reste dans un même plan.* »

Si c'est λ, Λ se meut dans un plan, et par suite L dans le plan homographique à celui-là.

Si c'est L, λ se meut dans le plan normal à la trajectoire du point.

123. « *La droite qui mesure la plus courte distance entre la droite* λ *et la droite milieu* Λ *relative aux deux* L *et* L' *rencontre l'axe central* X *et lui est perpendiculaire.* »

C'est ce que j'ai établi (**121**).

124. « *L'une des deux droites* λ *et* Λ *étant prise arbitrairement, l'autre est déterminée de position au moyen des deux relations*

$$r = \frac{\frac{1}{2}E}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}U}\,\frac{1}{\operatorname{tang}(\Lambda, X)}, \quad R = \frac{\frac{1}{2}E}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}U}\,\frac{1}{\operatorname{tang}(\lambda, X)},$$

dans lesquelles R *et* r *sont les distances des deux droites* Λ *et* λ *à l'axe central.* »

Reportons-nous au n° **77** : a est ici appelé α. Le plan mené par α perpendiculairement à AA' passe par λ : donc Iα est perpendiculaire à AA'; λ et AA' sont perpendiculaires : donc

$$\operatorname{tang}(a\Lambda, X) = \frac{1}{\operatorname{tang}(\lambda, X)},$$

d'où

$$R = \frac{\frac{1}{2}E}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}U}\,\frac{1}{\operatorname{tang}(\lambda, X)};$$

on aurait de même

$$r = \frac{\frac{1}{2}E}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}U}\,\frac{1}{\operatorname{tang}(\Lambda, X)}.$$

125. « *Expression des projections orthogonales des cordes* AA', BB', ..., *qui joignent les points homologues de deux droites* L, L' *sur la droite milieu* Λ :

$$AA'\cos(AA', \Lambda) = 2\left[R\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U\sin(\Lambda, X) + \tfrac{1}{2}E\cos(\Lambda, X)\right]. \text{ »}$$

Établi déjà au n° **96**.

126. « *Expression de la rotation* O *autour de la droite* λ, *nécessaire pour placer la droite* L *sur son homologue* L',

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}O = \frac{\tfrac{1}{2}E \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U}{r \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U \sin(\lambda, X) + \tfrac{1}{2}E \cos(\lambda, X)};$$

r est la plus courte distance de la droite λ *à l'axe central* X. »

En se reportant à la *fig.* 36, on a

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}O = \frac{\tfrac{1}{2}AA'}{I\alpha} = \frac{\tfrac{1}{2}AA'}{r + R},$$

ou (**124**)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}O = \frac{\tfrac{1}{2}AA'}{r + \dfrac{\tfrac{1}{2}E}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U} \dfrac{\cos(\lambda, X)}{\sin(\lambda, X)}} = \frac{\tfrac{1}{2}AA' \sin(\lambda, X) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U}{r \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U \sin(\lambda, X) + \tfrac{1}{2}E \cos(\lambda, X)};$$

mais

$$\sin(\lambda, X) = \cos(AA', X)$$

et

$$AA' \cos(AA', X) = E :$$

donc

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}O = \frac{\tfrac{1}{2}E \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U}{r \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U \sin(\lambda, X) + \tfrac{1}{2}E \cos(\lambda, X)}.$$

127. « Le dénominateur du second membre exprime la projection orthogonale sur la droite λ des cordes qui ont leurs milieux sur cette droite (**125**); par conséquent, on peut dire que :

» *La tangente de la demi-rotation autour d'une droite, multipliée par la projection orthogonale, sur cette droite, d'une corde ayant son milieu en un point de la droite, donne un produit constant, égal à* $E \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U$.

128. » *Relations entre les deux rotations* O *et* Ω *autour de deux droites* λ *et* L *par lesquelles on effectue le déplacement d'un corps :*

$$\cos\tfrac{1}{2}U = \cos\tfrac{1}{2}O \cos\tfrac{1}{2}\Omega - \sin\tfrac{1}{2}O \sin\tfrac{1}{2}\Omega \cos(\lambda, L),$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}U \sin(X, \overline{\lambda L}) = \sin\tfrac{1}{2}O \sin\tfrac{1}{2}\Omega \sin(\lambda, L).$$

$(X, \overline{\lambda L})$ *désigne l'angle qu'un plan parallèle aux deux axes de rotation fait avec l'axe central* X. »

Par un point de l'espace, je mène des parallèles à λ, L, L′ et à la droite λ' du second corps correspondant à la droite λ du premier; puis je coupe le tout par une sphère. Soient A le point de λ, B le point de L, B_1 le point de L′, X le point de l'axe central obtenus ainsi; j'ai alors la *fig.* 27, et rien n'est changé quant à la grandeur des rotations : donc

$$\cos\tfrac{1}{2}U = \cos\tfrac{1}{2}O\cos\tfrac{1}{2}\Omega - \sin\tfrac{1}{2}O\sin\tfrac{1}{2}\Omega\cos(\lambda, L)$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}U\sin p = \sin\tfrac{1}{2}O\sin\tfrac{1}{2}\Omega\sin(\lambda, L);$$

p est l'angle que fait l'axe central avec le plan de l'arc AB; on a donc

$$p = (X, \overline{\lambda L}),$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}U\sin(X, \overline{\lambda L}) = \sin\tfrac{1}{2}O\sin\tfrac{1}{2}\Omega\sin(\lambda, L).$$

129. « Le sinus de cet angle est égal au cosinus de l'angle que la droite qui mesure la plus courte distance des deux axes de rotation fait avec l'axe central. Soit Π cette droite. Sa projection sur l'axe X est égale à $\frac{1}{2}E$ (**121**) : on a donc

$$\Pi\sin(X, \overline{\lambda A}) = \tfrac{1}{2}E,$$

et l'équation précédente devient

$$\tfrac{1}{2}E\sin\tfrac{1}{2}U = \Pi\sin(\lambda, L)\sin\tfrac{1}{2}O\sin\tfrac{1}{2}\Omega.$$

» Elle exprime que :

» *Le produit des sinus des demi-rotations autour de deux axes conjugués, multiplié par le sinus de l'angle de ces deux axes et par leur plus courte distance, forme un produit constant.* »

Le sinus de l'angle $(X, \overline{\lambda L})$ est égal au cosinus de l'angle que fait l'axe X avec une droite perpendiculaire au plan (λL); or AI, plus courte distance de λ et L, est une pareille droite.

130. « Par conséquent :

» *Si l'on porte sur deux axes de rotation conjugués, tels que* L *et* λ, *des lignes proportionnelles aux sinus des demi-rotations autour de ces axes, le tétraèdre construit sur ces lignes aura son volume constant.* »

Reportons-nous au premier Mémoire (**21**). Soit BC la plus courte distance ou Π, soit $CD = \sin\frac{1}{2}\Omega$, $AB = \sin\frac{1}{2}O$; nous aurons

$$\text{surface}\,BCD = \tfrac{1}{2}\Pi \sin\tfrac{1}{2}\Omega.$$

La hauteur aura pour valeur

$$\sin\tfrac{1}{2}O \sin(\lambda, L),$$

et le volume du tétraèdre sera

$$\tfrac{1}{6}\Pi \sin(\lambda, L) \sin\tfrac{1}{2}O \sin\tfrac{1}{2}\Omega,$$

c'est-à-dire constant.

Propriétés diverses, relatives aux cordes qui joignent les points homologues et aux droites d'intersection des plans homologues.

131. « Il résulte de la seconde partie du théorème (**67**) que :

» *Si par un point fixe* O *on mène des droites* Oa, Ob,... *égales et parallèles à toutes les cordes* AA′, BB′,... *qui joignent deux à deux les points homologues de deux corps, les extrémités de ces cordes sont sur un même plan perpendiculaire à l'axe central commun aux deux corps.*

» *Et, si l'on ne considère que les cordes qui joignent les points homologues de deux droites homologues, les extrémités des droites* Oa, Ob,... *sont sur une même droite.* »

En effet, on sait (**46**, 1°) que Oa, Ob,... sont parallèles à un même plan.

132. « *Quand deux plans homologues tournent autour de deux*

points fixes, leur droite d'intersection, qui est toujours une corde (**70**), *a ses extrémités sur deux courbes du troisième ordre.* »

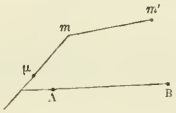
Soient A et B′ les deux points fixes; P et P′ les plans homologues qui y passent. P′ homologue de P renferme A′ homologue de A, et P homologue de P′ renferme B homologue de B′ : les deux plans tournent donc autour de deux droites homologues, et par suite (**102**, 2°) les points homologues des deux corps situés sur leur intersection décrivent deux courbes à double courbure du troisième ordre.

133. « *Par chacune des droites qui joignent les points homologues de deux plans homologues passent deux plans homologues* (**70**);

» *Ces plans sont tangents à deux surfaces de la troisième classe, c'est-à-dire à deux surfaces à chacune desquelles on peut mener trois plans tangents par une même droite.* »

Soit AB (*fig.* 37) cette droite; je vais démontrer qu'il n'y peut passer que trois plans. Soient m et m' deux points homologues des deux plans.

Fig. 37.



Considérons mm' comme appartenant à la seconde figure; soit $m\mu$ son homologue dans la première. Le plan $mm'\mu$ est un des plans tangents à la surface dont il est question; par hypothèse, il passe par AB. Or (**88**), quand plusieurs plans passent par une droite, il existe dans chacun d'eux un seul système de droites homologues mm', $m\mu$, et leur point de rencontre décrit une courbe à double courbure du troisième ordre. Il n'y aura donc sur l'un des plans que trois points m, par suite que trois plans mAB, ce qu'il fallait démontrer.

134. « *Quand des cordes* AA′, BB′,... *s'appuient sur une droite donnée* D, *les points* A, B,... *et* A′, B′,..., *qu'elles joignent deux à deux, sont situés sur deux hyperboloïdes à une nappe, qui ont un point commun situé à l'infini sur l'axe central.* »

Par cette droite menons un plan quelconque; on sait (**88**) que les points homologues des deux corps situés dans ce plan sont sur deux droites, qui engendrent deux hyperboloïdes ayant D pour génératrice commune. Par cette droite menons un plan parallèle à l'axe central; ce plan, considéré comme appartenant soit à la première, soit à la seconde figure, a pour homologues (**97**) des plans parallèles à l'axe central : donc les droites homologues contenues dans ce plan sont parallèles. Or (**88**) le point de rencontre de deux pareilles droites homologues appartient aux deux hyperboloïdes : donc ils ont un point commun situé à l'infini sur l'axe central.

135. « Cas particulier. — La droite D est à l'infini :

» *Quand des cordes sont parallèles à un même plan, leurs extrémités sont les points de deux plans homologues parallèles à l'axe central.* »

En effet, nos deux hyperboloïdes ont une génératrice commune D à l'infini : donc ce sont deux plans parallèles; ils ont de plus un point à l'infini sur l'axe central : donc ils lui sont parallèles. Ils étaient homologues : donc leurs plans sont homologues.

136. « *Les points d'un plan du premier corps, tels que les cordes qui les unissent à leurs homologues dans le deuxième corps s'appuient sur une même droite donnée, sont situés sur une conique;*

» *Et ces cordes forment une surface réglée du quatrième ordre* (**58**). »

Car ce sont les intersections de deux hyperboloïdes homologues par deux plans homologues.

137. « *Le lieu des points du premier corps, tels que les droites qui les unissent à leurs homologues s'appuient sur deux droites données dans l'espace, sont sur une courbe à double courbure du quatrième ordre, à laquelle on peut mener huit plans tangents par une même droite;*

» *Cette courbe a une asymptote parallèle à l'axe central;*

» *Et les droites qui joignent les points de cette courbe à leurs homologues dans le second corps forment une surface réglée du septième ordre.* »

D'après le n° **134**, ces points sont à l'intersection de deux hyperboloïdes, c'est-à-dire sur une courbe du quatrième ordre. Ces deux hyperboloïdes ont à l'infini un point commun sur l'axe central. Les deux plans tangents en ce point sont parallèles à l'axe central : donc leur intersection, parallèle à l'axe central, est asymptote de la courbe gauche. On sait d'ailleurs que, par une droite, on peut mener huit plans tangents à une pareille courbe.

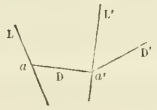
Les deux courbes dans les deux corps sont égales, et l'on démontrerait, par un procédé analogue à celui du n° **58**, que la surface lieu des droites qui joignent leurs points homologues est d'ordre $2m$; mais ces courbes ont un point commun à l'infini : le degré s'abaisse donc à $2m - 1 = 7$.

138. « *Les plans du premier corps qui rencontrent leurs homologues suivant des droites qui s'appuient sur une droite donnée* L′ *sont tous tangents à un paraboloïde hyperbolique.*

» *Ce paraboloïde passe par la droite* L′ *et par la droite* L *qui est, dans le premier corps, l'homologue de* L′ *considérée comme appartenant au second corps.* »

Soient a' (*fig.* 38) un point de L′, et (**81**) D et D′ les deux droites homologues qui passent par ce point. Le plan DD′ du premier corps

Fig. 38.



rencontrera son homologue du second suivant D′ et satisfera à la question. Or il passe par aa', qui engendre un paraboloïde, admettant L et L′ pour génératrices : donc il est tangent à ce paraboloïde, et le théorème est démontré.

139. « *Si, autour de deux points homologues, on fait tourner deux plans homologues, de manière que leur droite d'intersection s'ap-*

puie sur une droite L', *ces plans enveloppent deux cônes du second ordre.* »

En effet, tous ces plans sont tangents à un paraboloïde et passent par un point; donc ils enveloppent un cône circonscrit au paraboloïde, c'est-à-dire du second ordre.

140. « *Quand des plans du premier corps rencontrent leurs homologues suivant des droites qui s'appuient sur deux droites fixes données, ces plans enveloppent une développable du huitième ordre et de la quatrième classe, c'est-à-dire à laquelle on peut mener quatre plans tangents par un même point.*

» *Cette développable a un plan tangent à l'infini;*

» *Et les droites suivant lesquelles les plans du premier corps rencontrent leurs homologues forment une surface réglée du septième ordre.* »

Ce théorème est textuellement le corrélatif du théorème du n° **137**.

141. « *Les cordes qui joignent les points homologues de deux courbes égales d'ordre m, à double courbure, placées d'une manière quelconque dans l'espace, forment une surface réglée de l'ordre* $2m$, *qui a* m *génératrices (réelles ou imaginaires) situées à l'infini.*

» *Les parallèles aux génératrices de cette surface, menées par un même point, forment un cône d'ordre m.*

» *Si les deux courbes d'ordre m ont un point commun, c'est-à-dire un point qui, considéré comme appartenant à la première, est lui-même son homologue dans la seconde, la surface réglée est de l'ordre* $2m - 1$. »

Ces théorèmes se démontrent comme ceux du n° **19** et du n° **58**.

142. « On conclut de là que :

» *Quand une courbe à double courbure d'ordre m éprouve un mouvement infiniment petit dans l'espace, les trajectoires de ses points sont dirigées suivant les génératrices d'une surface réglée de l'ordre* $2m$, *et sont parallèles aux arêtes d'un cône d'ordre m;*

» *Et si le mouvement de la courbe est une simple rotation autour d'un de ses points, la surface réglée est de l'ordre* $2m - 1$.

143. » *Quand deux surfaces développables de la classe m (c'est à-dire qui admettent m plans tangents passant par un même point) sont placées d'une manière quelconque dans l'espace, les droites d'intersection de leurs plans tangents homologues forment une surface réglée d'ordre* $2m$;

» *Et ces droites sont parallèles aux arêtes d'un cône qui est aussi d'ordre* $2m$.

» *Si les deux développables ont un plan commun, c'est-à-dire un plan qui, considéré comme appartenant à la première, est lui-même son homologue dans la seconde, la surface réglée est de l'ordre* $2m - 1$. »

Ce théorème est le corrélatif du théorème du n° **141**.

144. « On conclut de là que :

» *Quand une développable de la classe m éprouve un mouvement infiniment petit, les caractéristiques de tous ses plans tangents* [*] *forment une surface réglée d'ordre* $2m$;

» *Et ces droites sont parallèles aux arêtes d'un cône qui est aussi d'ordre* $2m$.

145. » *Des cordes qui joignent les points homologues de deux plans homologues, il n'y en a qu'une qui se trouve située dans un plan donné.* »

Soient A et B′ les intersections des plans homologues par le plan donné; je cherche A′ homologue de A, qui coupe B′ en un point : donc le théorème est démontré.

146. « *Des droites d'intersection de deux plans homologues tournant autour de deux points homologues, il n'y en a qu'une qui passe par un point donné.* »

Soient a le point donné, a_1 son homologue dans la première figure, a_2 son homologue dans la seconde, m_1 et m_2 les deux points homologues donnés; les deux plans aa_1m_1 et aa_2m sont les deux seuls satisfaisant à la question : donc le théorème est démontré.

---

(1) « Voir *Comptes rendus*, t. XVI, p. 1420. »

Construction de l'axe central commun à deux corps égaux.

147. « Pour déterminer l'axe central, il suffit de connaître trois couples de points homologues des deux corps. Soient donc A, B, C trois points du premier corps, et A′, B′, C′ les trois points homologues du second corps. Soient a, b, c les milieux des trois cordes AA′, BB′, CC′. La droite ab, que nous appellerons Λ, est la droite milieu des deux droites homologues AB, A′B′. Les plans menés par les points a, b normalement aux deux cordes AA′, BB′, respectivement, se coupent suivant une droite λ (**46**, 4°). La droite sur laquelle se mesure la plus courte distance des deux droites λ et Λ rencontre l'axe central cherché et lui est perpendiculaire (**125**).

» Les deux cordes AA′ et CC′ donnent lieu de même à une autre droite qui rencontre l'axe central et lui est perpendiculaire. Ces deux droites déterminent l'axe central, qui n'est autre que la droite sur laquelle se mesure leur plus courte distance.

» Ainsi le problème est résolu.

148. » *Autrement.* Que par un point O de l'espace on mène des droites Oα, Oβ, Oγ égales et parallèles aux trois cordes AA′, BB′, CC′; le plan des trois points α, β, γ sera perpendiculaire à l'axe central, parce que les projections orthogonales des trois cordes sur cet axe sont égales (**67**). Ainsi la direction de l'axe central est déterminée.

» La recherche de la position de cet axe se réduit à celle de deux points homologues qui soient situés sur une perpendiculaire au plan $\alpha\beta\gamma$; car cette perpendiculaire sera évidemment l'axe central.

» On cherchera les deux points satisfaisant à cette condition, situés dans les plans des deux triangles ABC, A′B′C′. A cet effet, il suffit de projeter orthogonalement les deux triangles sur le plan $\alpha\beta\gamma$: leurs projections sont deux triangles égaux, et le point central de ces triangles est la projection des deux points demandés; conséquemment, c'est par ce point que passe l'axe central des deux corps.

» Cette construction dérive immédiatement de la démonstration même de l'existence de l'axe central.

149. » Elle donne lieu, dans ses applications, à deux remarques.

» Premièrement, il peut arriver que les trois cordes AA′, BB′, CC′ soient parallèles à un même plan, auquel cas les trois points α, β, γ se trouvent sur une même droite, et ne déterminent plus le plan perpendiculaire à l'axe central. Il semblerait donc que la construction est en défaut.

» Mais il suffit d'observer que dans ce cas elle n'est pas nécessaire, parce que la direction de l'axe central se trouve déterminée immédiatement par les données mêmes de la question; car, les trois cordes AA′, BB′, CC′ étant parallèles à un même plan, il en résulte que les deux plans homologues ABC, A′B′C′ sont parallèles à l'axe central (**135**); c'est-à-dire que leur droite d'intersection détermine la direction de cet axe.

» La seconde remarque se rapporte au cas du mouvement infiniment petit. La construction, tant de la direction que de la position absolue de l'axe central, qui devient l'axe instantané de rotation, subsiste théoriquement; mais elle n'est pas, en général, d'une application pratique, par la raison que, dans la plupart des questions de la théorie des machines, on pourra bien ne pas connaître les vitesses mêmes des trois points donnés A, B, C, représentées ici par les trajectoires infiniment petites de ces points, mais seulement les directions de ces vitesses, qui, en effet, suffisent pour déterminer le mouvement infiniment petit du corps. Il faut donc savoir déterminer la position de l'axe central au moyen de ces directions seules, de même que sur le plan les directions des trajectoires de deux points de la figure en mouvement suffisent pour déterminer le centre instantané de rotation.

» A cet égard, notre première construction satisfait pleinement à la question, théoriquement et pratiquement, car on n'y fait usage que des directions des trajectoires de trois points du corps en mouvement. »

Construction de la vis avec laquelle on peut transporter un corps d'une position donnée dans une autre position déterminée par trois points.

150. « Soient A, B, C trois points du corps, et A′, B′, C′ les positions que doivent prendre ces points dans la nouvelle position du corps.

» On détermine l'axe central comme il vient d'être dit ; ce sera l'axe de la vis.

» Qu'on prenne sur cet axe deux points homologues quelconques, leur distance E sera la quantité de glissement de l'axe sur lui-même; et enfin qu'on prenne deux plans homologues quelconques passant par l'axe central, leur angle U sera l'angle de rotation correspondant au glissement E.

» Par conséquent, si l'on appelle H le pas de la vis, on aura

$$\frac{H}{E} = \frac{360^\circ}{U}, \quad H = \frac{E.360^\circ}{U}.$$

» Si l'on veut diminuer le pas de la vis pour diminuer la force qui la mettra en mouvement, on fera faire à la vis plusieurs révolutions, en nombre n, plus une rotation U ; et alors le pas de la vis sera

$$H = \frac{E.360}{n.360 + U}. \text{ »}$$

Réponse à l'article intitulé : Sur de prétendues inadvertances dans lesquelles Lagrange serait tombé, etc.;

PAR M. J. BERTRAND.

Les inadvertances de Lagrange signalées par Poinsot sont sans importance, mais elles sont très-réelles, et j'ai peine à comprendre qu'un lecteur averti ait pu les révoquer en doute.

Si les composantes d'une force parallèlement à trois axes rectangulaires sont X, Y, Z, le moment virtuel relatif au déplacement, dont les composantes sont dx, dy, dz, est

$$(1) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Cette formule serait inexacte pour des axes obliques, et Lagrange, en effet, Poinsot le déclare expressément, ne l'a appliquée dans ses écrits qu'au seul cas des axes rectangulaires; mais il a dit, dans les premières pages de son beau livre, que rien n'oblige dans l'usage de la méthode à se servir de coordonnées rectangles. Le lecteur qui, d'après cette remarque, croirait pouvoir adopter l'expression (1) pour représenter le travail, dans tous les cas, commettrait une erreur. Poinsot, en prenant la peine de l'avertir, a montré l'importance qu'il attachait au chef-d'œuvre qu'on ne saurait trop admirer.

La question ne méritait guère d'être discutée de nouveau. Lagrange n'a jamais cru que l'expression (1) représentât le moment virtuel dans le cas des coordonnées obliques, et quand il l'a appliquée aux coordonnées rectangles, il avait oublié, sans doute, la déclaration générale faite quelques pages plus haut sur la possibilité d'appliquer la *méthode* aux coordonnées de toute nature. M. Breton préfère supposer que, par *sa méthode,* Lagrange entendait, d'une manière générale, l'appli-

cation du principe des vitesses virtuelles, et il s'attache à démontrer que, même en adoptant des coordonnées obliques, le principe peut donner, en suivant les indications de Lagrange lui-même, les trois composantes de la résultante d'un système de forces appliquées à un point. Personne, assurément, n'en a jamais douté, et le problème est trop facile pour qu'on trouve intérêt à le résoudre; mais un lecteur non prévenu pourrait se croire autorisé, par la phrase de Lagrange, à appliquer les mêmes formules dans les deux cas, et particulièrement l'expression (1), à la mesure du moment virtuel. Poinsot l'a averti de n'en rien faire et n'aurait certes pas supposé qu'on vînt, après trente ans, écrire dix-huit pages pour le reprocher à sa mémoire.

La Note de M. Breton contient un autre reproche, non moins injuste que le premier. Si, pour juger la remarque de Poinsot, relative à la composition des rotations, le savant auteur, au lieu de traduire à sa manière une page de Lagrange, pour la faire connaître, *au moins quant au fond,* avait bien voulu citer textuellement les quatre lignes auxquelles Poinsot fait allusion, il aurait reconnu qu'elles contiennent une inadvertance incontestable. Voici ces lignes :

« Cette composition (des moments) suit les mêmes règles que celles des moments rectilignes. On aurait pu la déduire immédiatement de la composition des rotations instantanées *en substituant les moments aux rotations qu'ils produisent,* comme Varignon a substitué les forces aux moments rectilignes. »

Les moments ne peuvent nullement être substitués aux rotations *qu'ils produisent,* et Poinsot, en le faisant remarquer, n'a commis aucune confusion.

Mémoire sur des formules de perturbation;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Poisson, après avoir donné ses formules générales de perturbation dans le XVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, les applique au mouvement d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe et sur lequel n'agissent que des forces perturbatrices; il trouve ainsi, page 336, des formules toutes semblables à celles qui sont relatives à la perturbation du mouvement d'une planète ou plus généralement du mouvement d'un point attiré par un centre fixe. Dans ces formules, les constantes relatives au plan de l'orbite sont remplacées par celles qui déterminent la position du plan dit *invariable*, qui est fixe quand le corps n'est sollicité par aucune force, mais qui se déplace par suite de la perturbation.

La parfaite analogie de deux systèmes de formules provenant de questions si différentes a attiré l'attention de Jacobi (tome III de ses Œuvres, p. 279). Après avoir embrassé, par une même analyse, les deux problèmes précédents, pour montrer qu'ils sont réductibles aux quadratures, il montre que les six constantes arbitraires, devenues variables par les perturbations, satisfont à six équations canoniques. Il développe ensuite seulement les calculs indiqués, pour le point attiré par un centre fixe, et trouve la signification des deux constantes conjuguées, l'une à l'axe du plan invariable et l'autre à la projection de cet axe sur une perpendiculaire à un plan fixe pris pour plan des x, y; mais, si l'on applique ces mêmes calculs au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, on est conduit à des opérations beaucoup plus compliquées que ne le nécessite la question en elle-même, et il paraît difficile, en suivant cette marche, de déterminer la signification

de ces deux constantes. D'ailleurs même la démonstration obtenue ainsi cessant d'être la même que pour le premier problème, il n'y aurait plus de raison de la préférer à celle qui a été donnée par Poisson.

D'après cela, il m'a semblé utile, pour la philosophie de la science, de chercher à démontrer entièrement, par la même analyse, les deux systèmes de formules de perturbation, et, en cherchant à reconnaître quels sont les liens communs aux deux questions, je suis arrivé à un théorème général qui renferme la démonstration de ces deux systèmes de formules.

Imaginons un système de points matériels pour lequel aient lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires. Quoique la position relative des points du système varie, on peut se représenter à chaque instant ce système et les trois axes principaux d'inertie qui y sont relatifs et qui passent par l'origine des coordonnées. Désignons sous le nom d'*équateur* le plan qui passera par deux de ces axes principaux, et considérons la trace A de l'équateur sur le plan invariable; désignons par σ l'angle de cette trace A avec une droite fixe menée par l'origine dans le plan invariable; l'origine de l'angle σ étant arbitraire, on peut regarder σ comme s'ajoutant à une constante arbitraire $-g$.

Appelons *ligne des nœuds* la trace du plan invariable sur le plan fixe des x, y. Désignons par α la longitude du nœud comptée à partir d'une droite fixe tracée par l'origine des coordonnées dans le plan des x, y, par h la constante des forces vives, par k l'axe du plan invariable, par β la projection de cet axe sur l'axe des z, et par τ la constante qui s'ajoute au temps t.

Convenons maintenant de compter l'angle σ à partir de la ligne des nœuds, alors g désignera aussi la distance angulaire d'un point fixe du plan invariable à cette ligne de nœuds.

Enfin supposons que les équations différentielles du problème soient intégrées et que l'on veuille rechercher comment les équations du mouvement doivent être modifiées, quand, aux forces que l'on a examinées, il s'ajoute des forces perturbatrices; exprimons la fonction perturbatrice Ω au moyen de t et des constantes arbitraires parmi lesquelles se trouvent h, β, k, τ, α, g. Alors toutes les constantes deviendront variables par suite de la perturbation, et les valeurs va-

riables des six quantités précédentes satisferont aux six équations canoniques suivantes :

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\tau}, & \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dh}; \\[2ex] \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\beta}, & \dfrac{d\beta}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha}; \\[2ex] \dfrac{dk}{dt} = \dfrac{d\Omega}{dg}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dk}. \end{cases}$$

Ces équations canoniques ne permettent pas de déterminer, en général, les six quantités h, τ,..., parce que Ω renferme, outre ces quantités, encore d'autres éléments. Mais ces six quantités sont entièrement déterminées par ces équations dans les deux problèmes dont nous avons déjà parlé. Dans le cas d'un corps attiré par un centre fixe, le plan invariable devient celui de l'orbite, et l'on peut prendre pour g la distance du périhélie au nœud ascendant; on a ainsi des formules qui se transforment immédiatement en celles que les astronomes emploient. Dans le cas d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe, sollicité seulement par des forces perturbatrices, on a des formules qui reviennent à celles de Poisson, citées ci-dessus. Enfin, dans le cas le plus général, si les six éléments h, τ,... varient très-peu, on pourra les calculer avec une grande approximation, pendant un temps assez considérable, à l'aide de quadratures déduites de ces formules. Supposons, par exemple, qu'un corps, en s'approchant de notre système planétaire, vienne à le troubler, les formules (a) permettront de calculer le déplacement du plan invariable.

Rappel de quelques principes.

1. Désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les variables qui déterminent la position d'un système de points matériels; posons

$$\frac{dq_1}{dt} = q'_1, \qquad \frac{dq_2}{dt} = q'_2, \ldots,$$

et exprimons la demi-force vive T du système au moyen de $q_1, q_2, \ldots, q_n$

et de leurs dérivées par rapport au temps t; puis posons

$$\frac{dT}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_n} = p_n;$$

enfin désignons par U la fonction de forces, et posons $T - U = H$.

Si u, v sont deux fonctions quelconques des variables q_i, p_i, on représente d'ordinaire par le symbole $[u, v]$ l'expression

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dq_1}\frac{dv}{dp_1} + \frac{du}{dq_2}\frac{dv}{dp_2} + \ldots + \frac{du}{dq_n}\frac{dv}{dp_n} \\ &- \frac{du}{dp_1}\frac{dv}{dq_1} - \frac{du}{dp_2}\frac{dv}{dq_2} - \ldots - \frac{du}{dp_n}\frac{dv}{dq_n}. \end{aligned}$$

S'il n'existe aucune relation entre les n variables q_i, et qu'on les remplace par n autres variables également propres à déterminer la position du système, l'expression $[u, v]$ ne change pas de valeur.

Supposons ensuite qu'il existe entre les n variables q_i les r équations de condition

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_r = 0,$$

qui expriment des liaisons entre les points du système, et posons

$$f_{r+1} = [f_1, H], \quad f_{r+2} = [f_2, H], \ldots, \quad f_{2r} = [f_r, H];$$

les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ peuvent s'exprimer au moyen de $n - r$ variables seulement $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}$, et T peut s'exprimer au moyen de ces mêmes variables et de leurs dérivées $Q'_1, Q'_2, \ldots$. Posons, en général,

$$\frac{dT}{dQ'_i} = P_i.$$

Les fonctions u, v peuvent s'exprimer au moyen des variables Q_i, P_i, et l'on peut former l'expression, analogue à $[u, v]$,

$$\sum_{i=0}^{i=n-r} \left(\frac{du}{dQ_i}\frac{dv}{dP_i} - \frac{du}{dP_i}\frac{dv}{dQ_i}\right),$$

que nous représenterons par $[u, v]'$. Alors on a

$$(2) \qquad [u, v]' = [u, v + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_{2r} f_{2r}],$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots$ étant donnés par les $2r$ équations renfermées dans celle-ci :

$$(3) \qquad [f_1, f_i]\mu_1 + [f_2, f_i]\mu_2 + \ldots + [f_{2r}, f_i]\mu_{2r} = [f_i, v],$$

où l'on doit donner à i les valeurs $1, 2, \ldots, 2r$. (*Voir* mon *Mémoire sur les équations différentielles canoniques de la Mécanique*, n° **20**, tome précédent de ce Journal, p. 304.)

2. Dans tout ce qui suivra, nous imaginerons un système de points matériels, pour lequel aient lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires. Ces quatre intégrales ont lieu pour un système de points libres qui s'attirent ou se repoussent mutuellement; mais elles ont lieu plus généralement pour un système de points, soumis à une fonction de forces qui ne change pas par le mouvement des axes de coordonnées autour de l'origine et assujettis à des liaisons, pourvu que les équations qui les représentent subsistent par le même mouvement des axes de coordonnées. Les liaisons satisferont effectivement à cette condition, quand les points seront liés entre eux et à l'origine, mais ne seront liés à rien qui soit situé en dehors de l'origine ou du système de points; c'est ce qui a lieu en particulier pour un corps solide, qui ne peut que tourner autour de l'origine.

S'il s'agit d'appliquer ces quatre intégrales au système planétaire, il faudra prendre pour l'origine des coordonnées le centre de gravité du système, lequel a un mouvement rectiligne et uniforme.

Désignons par x_i, y_i, z_i généralement les coordonnées rectangulaires d'un point, dont la masse est m_i, et par x'_i, y'_i, z'_i leurs dérivées par rapport à t; nous aurons pour les trois équations des aires

$$\varphi_1 = \Sigma m_i(y_i z'_i - z_i y'_i) = \text{const.},$$
$$\varphi_2 = \Sigma m_i(z_i x'_i - x_i z'_i) = \text{const.},$$
$$\varphi_3 = \Sigma m_i(x_i y'_i - y_i x'_i) = \text{const.}$$

Si l'on forme les trois expressions

$$[\varphi_2, \varphi_3], \quad [\varphi_3, \varphi_1], \quad [\varphi_1, \varphi_2],$$

en prenant pour les quantités q_s les variables x_i, y_i, z_i, et par suite, pour les quantités p_s les expressions $m_i x'_i$, $m_i y'_i$, $m_i z'_i$, on trouve facilement

$$[\varphi_2, \varphi_3] = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1] = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_3.$$

Imaginons ensuite qu'on exprime les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 au moyen des $2(n-r)$ variables Q_i, P_i, entre lesquelles n'existent pas d'équations de condition, et examinons les trois expressions

$$[\varphi_2, \varphi_3]', \quad [\varphi_3, \varphi_1]', \quad [\varphi_1, \varphi_2]'.$$

Désignons par ψ une fonction quelconque des variables q_i, p_i; en appliquant la formule (2), nous aurons

$$(4) \qquad [\psi, \varphi_3]' = [\psi, \varphi_3 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_{2r} f_{2r}],$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2r}$ étant donnés par les $2r$ équations renfermées dans celle-ci :

$$(5) \qquad [f_1, f_s]\mu_1 + [f_2, f_s]\mu_2 + \ldots + [f_{2r}, f_s]\mu_{2r} = [f_s, \varphi_3],$$

où s est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, 2r$.

Si s n'est pas plus grand que r, la fonction f_s désigne le premier membre d'une des équations (1); elle ne dépend que des variables q_i ou x_i, y_i, z_i, et l'on trouve facilement

$$[f_s, \varphi_3] = \sum_i \left(x_i \frac{df_s}{dy_i} - y_i \frac{df_s}{dx_i} \right).$$

Or, par hypothèse, l'équation $f_s = 0$ ne doit pas changer par le mouvement de rotation du système de coordonnées autour de l'axe des z, et il en résulte

$$\sum \left(x_i \frac{df_s}{dy_i} - y_i \frac{df_s}{dx_i} \right) = 0;$$

on a donc, si s n'est pas plus grand que r,

$$(6) \qquad [f_s, \varphi_3] = 0.$$

Je dis ensuite que cette équation a également lieu si s est $> r$. En effet, on a l'identité bien connue et facile à vérifier

$$[[\mathrm{H}, f_s], \varphi_3] + [[\varphi_3, \mathrm{H}], f_s] + [[f_s, \varphi_3], \mathrm{H}] = 0.$$

Si s est supposé n'être pas plus grand que r, on a l'équation (6); et puisque $\varphi_3 = \text{const.}$ est une intégrale du problème, on a $[\mathrm{H}, \varphi_3] = 0$; donc le deuxième et le troisième terme de l'identité sont nuls et elle devient

$$[f_{r+s}, \varphi_3] = 0.$$

On a donc enfin l'équation (6) pour $s = 1, 2, \ldots, 2r$.

Il résulte de là que les seconds membres des équations (5) sont nuls; donc on satisfera à ces équations en prenant $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2r}$ tous égaux à zéro, et l'équation (4) se réduit à

$$[\psi, \varphi_3]' = [\psi, \varphi_3];$$

en particulier, en faisant $\psi = \varphi_2$, on aura la première des trois formules

$$[\varphi_2, \varphi_3]' = [\varphi_2, \varphi_3], \quad [\varphi_3, \varphi_1]' = [\varphi_3, \varphi_1], \quad [\varphi_1, \varphi_2]' = [\varphi_1, \varphi_2],$$

et les deux autres s'en déduisent par analogie. On a donc aussi les formules suivantes :

$$[\varphi_2, \varphi_3]' = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1]' = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2]' = \varphi_3,$$

données par Jacobi (*Nova methodus*, etc., § 51, tome III de ses Œuvres, p. 234).

Analogie entre deux problèmes.

3. Le problème du mouvement d'un point attiré par un centre fixe et celui du mouvement, autour d'un point fixe, d'un corps solide qui

n'est sollicité par aucune force, ont été traités par Jacobi, à l'aide d'une même analyse que je vais rappeler (*Nova methodus*, § 66).

Dans ces deux problèmes on a le principe des forces vives et les trois intégrales des aires; car les liaisons dans le second problème satisfont à la condition expliquée au commencement du n° 2. De plus, les deux problèmes ne dépendent que de trois coordonnées q_1, q_2, q_3.

Soit

$$H = T - U = h$$

l'équation des forces vives, h désignant une constante, et soient, comme ci-dessus,

$$\varphi_1 = \text{const.}, \quad \varphi_2 = \text{const.}, \quad \varphi = \text{const.}$$

les trois équations des aires. D'après la fin du numéro précédent, on a, par rapport aux trois variables q_1, q_2, q_3, et leurs conjuguées p_1, p_2, p_3, les trois équations

$$(1) \qquad [\varphi_2, \varphi] = \varphi_1, \quad [\varphi, \varphi_1] = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] = \varphi.$$

Posons

$$L = \sqrt{\varphi^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2},$$

nous aurons les trois équations

$$[H, \varphi] = 0, \quad [H, L] = 0, \quad [\varphi, L] = 0,$$

les deux premières ayant lieu parce que

$$\varphi = \text{const.}, \quad L = \text{const.}$$

sont deux intégrales, et la troisième se déduisant des équations (1). Posons les trois équations

$$(2) \qquad H = h, \quad \varphi = a, \quad L = k,$$

h, a, k étant des constantes arbitraires. Par l'origine nous mènerons une normale au plan invariable, et nous porterons, à partir de ce point, sur cette droite une longueur égale à k, que nous appellerons l'*axe du plan invariable;* alors a désignera la projection de l'axe du plan invariable sur l'axe des z.

D'après un théorème connu, si l'on tire p_1, p_2, p_3 des trois équations (2) et qu'on pose

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3),$$

les trois intégrales finies sont

$$(3) \qquad \frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{da} = b, \quad \frac{dV}{dk} = l,$$

τ, b, l désignant trois nouvelles constantes. Supposons ensuite qu'on introduise des forces perturbatrices et que la fonction perturbatrice soit désignée par Ω; les six constantes précédentes deviendront variables, et, d'après un théorème connu, on déduit des équations (3) que ces six quantités, devenues variables, sont données par les équations suivantes :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\Omega}{d\tau}, \qquad \frac{da}{dt} = \frac{d\Omega}{db}, \qquad \frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{dl};$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\Omega}{dh}, \quad \frac{db}{dt} = -\frac{d\Omega}{da}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{d\Omega}{dk}.$$

Jacobi montre ensuite que, dans le problème du mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, $-b$ représente la longitude du nœud ascendant de l'orbite sur un plan fixe (qui est supposé le plan des x, y), et que l représente la distance angulaire du périhélie à ce nœud; mais pour le second problème, où le calcul de la fonction V devient plus compliqué, il ne détermine pas la signification géométrique de ces deux constantes. Je vais m'occuper de la détermination de ces deux constantes dans ces deux problèmes, en employant la même analyse et en résolvant un problème plus général.

Formule qui donne la trace de l'équateur, d'un système de points en mouvement, sur le plan invariable.

4. Considérons le système de points défini au n° **2**, et qui comprend un système de points entièrement libre. Représentons-nous à chaque instant ce système et les trois axes principaux qui y sont relatifs et

qui passent par le point O, origine des coordonnées; enfin désignons sous le nom d'*équateur* un plan mené par deux des trois axes principaux.

Pour le système en question, nous avons le principe des forces vives et les trois intégrales des aires; par conséquent il existe un plan invariable, c'est-à-dire un plan du maximum des aires qui est fixe.

Outre le système fixe de coordonnées rectangulaires des x, y, z, qui passe par le point O, imaginons un second système rectangulaire des x', y', z', les axes des x', y' étant menés suivant les deux axes principaux situés dans le plan de l'équateur, et l'axe des z' étant mené suivant le troisième axe principal.

Désignons généralement par m la masse du point dont les coordonnées sont x, y, z dans le premier système et x', y', z' dans le second; nous aurons, d'après les propriétés des axes principaux, les trois équations où le signe sommatoire Σ se rapporte à toutes les masses m

$$\Sigma m x' y' = 0, \quad \Sigma m y' z' = 0, \quad \Sigma m z' x' = 0,$$

et l'on passe du premier système de coordonnées au second par les formules

$$\begin{aligned} x &= a x' + b y' + c z', \\ y &= a' x' + b' y' + c' z', \\ z &= a'' x' + b'' y' + c'' z', \end{aligned}$$

a, b, c,... étant les cosinus des angles des axes des x, y, z avec ceux des x', y', z'. Désignons : 1° par σ l'angle compris entre l'axe des x et la trace du plan des x', y' sur le plan des x, y; 2° par φ l'angle de cette trace avec l'axe des x'; 3° par θ l'inclinaison du plan des x', y' sur le plan des x, y, on aura les formules connues

$$\begin{aligned} a &= -\cos\theta \sin\sigma \sin\varphi + \cos\sigma \cos\varphi, \\ b &= -\cos\theta \sin\sigma \cos\varphi - \cos\sigma \sin\varphi, \\ c &= \sin\theta \sin\sigma; \\ a' &= \cos\theta \cos\sigma \sin\varphi + \sin\sigma \cos\varphi, \\ b' &= \cos\theta \cos\sigma \cos\varphi - \sin\sigma \sin\varphi, \\ c' &= -\sin\theta \cos\sigma; \end{aligned}$$

$$a'' = \sin\theta \sin\varphi, \quad b'' = \sin\theta \cos\varphi, \quad c'' = \cos\theta.$$

Si ensuite nous posons

$$\begin{aligned} c\,db + c'\,db' + c''\,db'' &= p\,dt, \\ a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' &= q\,dt, \\ b\,da + b'\,da' + b''\,da'' &= r\,dt, \end{aligned}$$

nous déduirons des valeurs de a, b, c,... les trois équations

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} p\,dt &= \sin\varphi \sin\theta\, d\sigma + \cos\varphi\, d\theta, \\ q\,dt &= \cos\varphi \sin\theta\, d\sigma - \sin\varphi\, d\theta, \\ r\,dt &= d\varphi + \cos\theta\, d\sigma; \end{aligned} \right.$$

$p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ représentent les rotations instantanées que doit subir le système des axes des x', y', z' autour de chacun de ces trois axes, pour qu'il vienne à la position infiniment voisine qu'il doit en effet occuper au bout de l'instant dt.

Désignons par u, v, w les vitesses relatives du point (x, y, z) par rapport aux axes principaux, en sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} u &= a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}, \\ v &= b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt}, \\ w &= c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Prenons maintenant pour plan des x, y le plan invariable; alors, en projetant l'axe k du plan invariable, qui est dirigé suivant l'axe des z, sur les axes des x', y', z', on aura facilement

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma m(y'w - z'v) &= k\sin\theta\sin\varphi, \\ \Sigma m(z'u - x'w) &= k\sin\theta\cos\varphi, \\ \Sigma m(x'v - y'u) &= k\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Des équations (1) on déduit

$$(3)\qquad \sin^2\theta\, d\sigma = \sin\varphi\sin\theta\, p\,dt + \cos\varphi\sin\theta\, q\,dt,$$

et de la troisième équation (2)

$$\sin^2\theta = \frac{1}{k^2}\left(k^2 - (\Sigma m(x'v - y'u))^2\right).$$

La quantité $(x'v - y'u)dt$ représente l'aire infiniment petite, décrite par la projection de la masse m dans le plan de l'équateur pendant l'instant dt; posons

$$\Sigma m(x'v - y'u) = \mathcal{A},$$

$\mathcal{A}$ représente deux fois la somme des masses multipliées par la vitesse aréolaire de leurs projections, et l'on déduit de l'équation (3) la formule

$$(4) \qquad d\sigma = \frac{pk\sin\varphi\sin\theta + qk\cos\varphi\sin\theta}{k^2 - \mathcal{A}^2}k\,dt,$$

qui donne le mouvement de la trace de l'équateur sur le plan invariable.

Nous allons donner une autre forme au numérateur de la formule (4). Nous avons les trois équations

$$\Sigma m y' z' = 0, \quad \Sigma m z' x' = 0, \quad \Sigma m x' y' = 0;$$

au bout de l'instant dt, les axes des x', y', z' ont changé de position, mais ils sont restés des axes principaux; on a donc, en différentiant les trois équations précédentes,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum m y' \frac{dz'}{dt} + \sum m z' \frac{dy'}{dt} = 0, \quad \sum m z' \frac{dx'}{dt} + \sum m x' \frac{dz'}{dt} = 0, \\ &\qquad \sum m x' \frac{dy'}{dt} + \sum m y' \frac{dx'}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

En différentiant les expressions de x, y, z, on a

$$\frac{dx}{dt} = x'\frac{da}{dt} + y'\frac{db}{dt} + z'\frac{dc}{dt} + a\frac{dx'}{dt} + b\frac{dy'}{dt} + c\frac{dz'}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = x'\frac{da'}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{dc'}{dt} + a'\frac{dx'}{dt} + b'\frac{dy'}{dt} + c'\frac{dz'}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = x'\frac{da''}{dt} + y'\frac{db''}{dt} + z'\frac{dc''}{dt} + a''\frac{dx'}{dt} + b''\frac{dy'}{dt} + c''\frac{dz'}{dt};$$

et en se reportant aux expressions des composantes u, v, w de la vitesse, suivant les axes des x', y', z'

$$u = qz' - ry' + \frac{dx'}{dt},$$

$$v = rx' - pz' + \frac{dy'}{dt},$$

$$w = py' - qx' + \frac{dz'}{dt}.$$

On aura donc

$$\sum m(y'w - z'v) = \sum m\left(py'^2 - qx'y' + y'\frac{dz'}{dt} - rx'z' + pz'^2 - z'\frac{dy'}{dt}\right)$$
$$= p\sum m(z'^2 + y'^2) + \sum m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right);$$

on a de même

$$\sum m(z'u - x'w) = q\sum m(x'^2 + z'^2) + \sum m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right).$$

On déduit des formules (2)

$$k\sin\theta\sin\varphi = \mathrm{A}p + \sum m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right),$$

$$k\sin\theta\cos\varphi = \mathrm{B}q + \sum m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right),$$

en posant

$$\Sigma m(z'^2 + y'^2) = \mathrm{A}, \quad \Sigma m(x'^2 + z'^2) = \mathrm{B}.$$

En substituant ces expressions dans la formule (4) et en ayant égard aux équations (5), on a la formule

$$(6) \qquad d\sigma = \frac{\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + 2\sum m(py' - qx')\frac{dz'}{dt}}{k^2 - \mathcal{A}^2}\,k\,dt,$$

qui détermine le mouvement de la ligne des nœuds du plan de l'équateur sur le plan invariable.

Sur des relations qui existent entre six éléments des intégrales.

5. On comprend facilement que l'on puisse déterminer, d'abord en fonction de t, toutes les quantités renfermées dans le second membre de l'équation (6); donc, en désignant par g une constante arbitraire, on pourra poser que $\sigma - g$ est égal à l'intégrale du second membre. Au reste, il n'est pas indispensable de connaître la formule (6) pour se représenter la constante g. En effet, en prenant σ pour une des inconnues du problème, nous devrons dans les intégrales trouver σ ajouté à une constante $-g$; car, de même que t est ajouté à une constante τ dans ces intégrales, parce que les formules du mouvement ne doivent pas dépendre de l'origine prise pour t, de même, l'origine de l'angle σ étant arbitraire, σ doit s'ajouter à une constante arbitraire.

Désignons par γ l'inclinaison du plan invariable sur un plan fixe, qu'on peut prendre pour plan des x, y d'un système d'axes rectangulaires, dont l'origine est toujours au point O. Désignons par $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\beta_1$, $\frac{1}{2}\beta_2$ la somme des masses multipliées par les projections des aires qu'elles décrivent dans l'unité de temps, respectivement sur le plan des x, y, des y, z, des z, x. Soit α la longitude du nœud du plan invariable sur le plan fixe des x, y; enfin désignons, comme ci dessus, par h la constante de l'équation des forces vives, par τ la constante qui s'ajoute au temps t et par k la grandeur de l'axe du plan invariable.

Nous allons examiner des relations existant entre h, β, k, τ, α, g.

1° L'équation $L = k$ du n° 3 étant une intégrale qui ne renferme pas t, on a, comme on sait, $[H, L] = 0$, ce qui peut s'écrire

$$[h, k] = 0,$$

en imaginant h, k remplacés par les fonctions des variables q_i, p_i qui leur sont égales.

2° De même on a, puisque $\varphi = \beta$ est une intégrale,

$$[h, \beta] = 0;$$

on a pour la même raison les deux autres intégrales

$$[h, \beta_1] = 0, \quad [h, \beta_2] = 0.$$

3° La longitude α du nœud du plan invariable est constante; donc, si l'on suppose α exprimé au moyen des variables q_i, p_i, l'équation

$$\alpha = \text{const.}$$

est une intégrale; par suite on a

$$[h, \alpha] = 0.$$

On le voit encore comme il suit. Menons l'axe des x suivant l'origine des longitudes et l'axe des y suivant la longitude $\frac{\pi}{2}$; nous aurons, en projetant l'axe du plan invariable sur les axes des x et des y,

$$\beta_1 = k \sin\gamma \sin\alpha, \quad \beta_2 = -k \sin\gamma \cos\alpha,$$

et par suite

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad d\alpha = \frac{\beta_1 d\beta_2 - \beta_2 d\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2},$$

$$[h, \alpha] = \frac{\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[h, \beta_2] - \frac{\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[h, \beta_1] = 0.$$

4° Prouvons que l'on a

$$[\beta, -\alpha] = 1.$$

En effet on a

$$[\beta, \alpha] = \frac{\beta_1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[\beta, \beta_2] - \frac{\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}[\beta, \beta_1].$$

Or on a, d'après la fin du n° **2**,

$$[\beta, \beta_2] = -\beta_1, \quad [\beta, \beta_1] = \beta_2;$$

on a donc

$$[\beta, \alpha] = -1.$$

5° L'équation $[\varphi, L] = 0$, trouvée au n° **3**, peut s'écrire

$$[\beta, k] = 0.$$

6° On a

$$[k, \alpha] = \frac{1}{\beta_1^2 + \beta_2^2}(\beta_1[k, \beta_2] - \beta_2[k, \beta_1]);$$

or, de même qu'on a $[k, \beta] = 0$, on a aussi $[k, \beta_1] = 0$, $[k, \beta_2] = 0$; donc

$$[k, \alpha] = 0.$$

7° Je dis que l'on a

$$[h, \tau] = 1, \quad [\tau, \beta] = 0, \quad [\tau, k] = 0, \quad [\tau, \alpha] = 0.$$

En effet, en général, pour un problème quelconque de Dynamique, dans lequel ont lieu les trois intégrales des aires et l'intégrale des forces vives, on peut imaginer un système de n intégrales du premier ordre, résolues par rapport aux constantes arbitraires $h, h_1, \ldots, h_{n-1}$,

$$(1) \qquad H = h, \quad H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \ldots, H_{n-1} = h_{n-1},$$

dont la première sera l'intégrale des forces vives, la deuxième l'équation des aires pour le plan des x, y, en sorte que la constante h_1 est égale à β, et la troisième l'équation $L = k$, en sorte que h_2 est égal à k, tous les premiers membres des équations (1) satisfaisant, d'après un théorème de M. Liouville, aux $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions renfermées dans la formule

$$[H_i, H_s] = 0,$$

où i, s désignent deux quelconques des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Alors, si l'on tire des n équations (1) les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et qu'on les substitue dans l'expression

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n),$$

on aura les intégrales finies

$$\frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{dh_1} = l_1, \quad \frac{dV}{dh_2} = l_2, \ldots, \frac{dV}{dh_{n-1}} = l_{n-1},$$

et les quantités

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} h, & h_1 = \beta, & h_2 = k, \ldots, & h_{n-1}, \\ l_0 = \tau, & l_1, & l_2 \quad , \ldots, & l_{n-1} \end{array} \right.$$

forment un système d'éléments canoniques, c'est-à-dire satisfaisant aux équations

$$[h_i, h_s] = 0, \quad [l_i, l_s] = 0, \quad [h_i, l_s] = 0, \quad [h_i, l_i] = 1,$$

i, s étant susceptibles des valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, mais différents entre eux. On a donc, en particulier, les trois équations à démontrer

$$[h, \tau] = 1, \quad [\tau, \beta] = 0, \quad [\tau, k] = 0.$$

Je dis qu'on a aussi $[\tau, \alpha] = 0$. En effet, puisque l'on a $[\tau, \beta] = 0$, quel que soit d'ailleurs le choix que l'on ait fait des variables q_i, p_i on a de même

$$[\tau, \beta_1] = 0, \quad [\tau, \beta_2] = 0;$$

et, comme on a $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{\beta_1}{\beta_2}$, il en résulte

$$[\tau, \alpha] = 0.$$

La quantité l_1 n'est pas nécessairement égale à $-\alpha$, mais elle peut être prise égale. En effet, si nous posons

$$l_1 = \text{fonct.}\,(\alpha, h_2, h_3, \ldots, h_{n-1}; l_2, l_3, \ldots, l_{n-1}),$$

nous aurons

$$[\beta, l_1] = \frac{dl_1}{d\alpha}[\beta, \alpha] + \frac{dl_1}{dh_2}[\beta, h_2] + \frac{dl_1}{dh_3}[\beta, h_3] + \ldots$$
$$+ \frac{dl_1}{dl_2}[\beta, l_2] + \frac{dl_1}{dl_3}[\beta, l_3] + \ldots,$$

et, comme on a $[\beta, h_2] = 0$, $[\beta, l_2] = 0, \ldots$, il en résulte

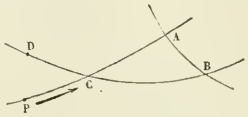
$$[\beta, l_1] = \frac{dl_1}{d\alpha}[\beta, \alpha] = -\frac{dl_1}{d\alpha};$$

ensuite, β, l_1 étant deux éléments conjugués, on a $[\beta, l_1] = 1$, donc

$$\frac{dl_1}{d\alpha} = -1 \quad \text{et} \quad l_1 = -\alpha + \text{fonct.}\,(h_2, h_3, \ldots, l_2, l_3, \ldots);$$

la fonction du second membre est arbitraire; on peut la prendre égale à zéro, et alors on a $l_1 = -\alpha$.

6. Je vais maintenant démontrer que l'élément l_2 du système (2) d'éléments canoniques peut être pris égal à g.



Imaginons une sphère dont le centre soit à l'origine des coordonnées; elle est coupée par le plan des x, y suivant le grand cercle DB, par le plan invariable suivant le grand cercle CA, enfin par l'équateur suivant le grand cercle AB.

Convenons que l'on compte l'arc σ défini au n° 4 à partir du point C, alors on aura $CA = \sigma$; si D est le point à partir duquel on compte les longitudes, on a $DC = \alpha$. Désignons l'arc CB par χ; enfin sur le grand cercle CA prenons, à partir du point C, CP égal à g.

L'angle aigu ACB représente l'inclinaison γ; supposons les longitudes comptées positivement de C vers B, alors sur la figure α est positif. Dans le cas où le grand cercle CA représente l'orbite d'une planète dont C est le nœud ascendant, on a l'habitude de compter positivement les longitudes sur l'orbite, dans le sens de la flèche; nous supposerons qu'on fasse de même ici; d'après la figure, en ayant égard au signe, il faudra donc faire $CP = -g$, g étant négatif, et l'on aura

$$PA = \sigma - g.$$

Supposons que le plan des x, y tourne autour de la ligne des nœuds, jusqu'à ce qu'il vienne coïncider avec le plan invariable; à la limite, l'inclinaison γ sera nulle et $\beta = k\cos\gamma$ deviendra égal à k; l'arc CB ou χ deviendra égal à CA ou σ, et, si l'on suppose qu'à la limite PC est égal à DC, ce qui est permis, on aura aussi à la limite $g = -\alpha$; or β, $-\alpha$ sont constamment deux éléments conjugués : donc à la limite k, g sont également deux éléments conjugués; par conséquent l'élément l_2 du tableau (2) peut être pris égal à g, pour cette limite.

Ainsi on a $l_2 = g$, quand le plan des x, y est venu coïncider avec le plan invariable, et je dis maintenant que l_2 peut être pris égal à g, quelle que soit la position du plan des x, y mené par le point origine.

Les éléments h_i, l_i du tableau (2) forment un système d'éléments

canoniques, dont les six premiers sont

$$h_0 = h, \quad h_1 = \beta, \quad h_2 = k,$$
$$l_0 = \tau, \quad l_1 = -\alpha, \quad l_2.$$

Désignons par h'_i, l'_i ce que deviennent les éléments h_i, l_i, quand le plan des x, y, après avoir tourné autour de la ligne des nœuds, vient à coïncider avec le plan invariable; nous aurons

$$h'_0 = h, \quad h'_2 = k,$$
$$l'_0 = \tau, \quad l'_2 = g,$$

les éléments h'_1, l'_1 s'étant confondus avec h'_2, l'_2.

Les deux quantités β, α sont suffisantes pour déterminer la position du plan invariable, qui passe par l'origine, par rapport aux axes de coordonnées. Donc on peut regarder h_2, l_2, h_3, l_3,... comme indépendants de la position du plan invariable par rapport à ces axes, et par suite, lorsque le plan des x, y, après avoir tourné autour de la ligne des nœuds, aura coïncidé avec le plan invariable, on peut supposer que h_2, l_2, h_3, l_3,... restent les mêmes ou qu'on a

$$h'_2 = h_2, \quad h'_3 = h_3, \ldots,$$
$$l'_2 = l_2, \quad l'_3 = l_3, \ldots;$$

donc, réciproquement, si l'on a d'abord calculé les éléments h'_2, l'_2, h'_3, l'_3,..., on pourra les prendre pour les éléments h_2, l_2, h_3, l_3,... et, en particulier, puisqu'on a $l'_2 = g$, on a également

$$l_2 = g.$$

7. On a donc enfin le théorème suivant :

« Supposons un problème de Dynamique pour lequel le principe » des forces vives et les trois intégrales des aires aient lieu. Désignons » par h la constante du principe des forces vives, par k la grandeur de » l'axe du plan invariable, par α la longitude de la trace c du plan in- » variable sur un plan fixe, par β la projection de k sur la normale à » ce plan fixe, par τ la constante qui s'ajoute au temps t par l'intégra-

» tion, enfin par g la distance angulaire du nœud c à un point fixe du
» grand cercle déterminé par le plan invariable sur la sphère dont le
» centre est à l'origine. Alors les six quantités

$$\begin{matrix} h, & \beta, & k, \\ \tau, & -\alpha, & g \end{matrix}$$

» forment trois couples d'éléments canoniques conjugués; c'est-à-dire
» qu'ils satisfont aux quinze équations suivantes :

$$\begin{gathered} [h, \tau] = 1, \quad [\beta, -\alpha] = 1, \quad [k, g] = 1, \\ [h, \beta] = 0, \quad [h, \alpha] = 0, \quad [h, k] = 0, \quad [h, g] = 0, \\ [\tau, \beta] = 0, \quad [\tau, \alpha] = 0, \quad [\tau, k] = 0, \quad [\tau, g] = 0, \\ [\beta, k] = 0, \quad [\beta, g] = 0, \quad [\alpha, k] = 0, \quad [\alpha, g] = 0. \end{gathered}$$

Sur des formules de perturbation.

8. Supposons que l'on soit parvenu à intégrer les équations différentielles d'un problème de Mécanique, dans lequel ont lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires. Concevons ensuite que l'on ajoute aux forces du problème précédent des forces perturbatrices; désignons par Ω la fonction perturbatrice; alors on passe des équations différentielles canoniques du problème précédent

$$\begin{gathered} \frac{dq_1}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_2}, \ldots, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_2}, \ldots, \end{gathered}$$

à celles du problème actuel, en y changeant U en $\mathrm{U} + \Omega$ ou H en $\mathrm{H} - \Omega$; Ω est une fonction des quantités q_i, p_i et, en remplaçant les q_i, p_i par les valeurs résultant des intégrations, on aura Ω exprimé au moyen de t et des constantes,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{matrix} h, & \beta, & k, & h_3, & h_4, \ldots, & h_{n-1}, \\ \tau, & -\alpha, & g, & l_3, & l_4, \ldots, & l_{n-1}. \end{matrix} \right.$$

Dans le second problème on conserve la même forme aux expressions des q_i, p_i que dans le premier, mais les constantes (1) qui y sont renfermées sont alors considérées comme des éléments variables, et, d'après un théorème connu, ces éléments satisfont à un système d'équations différentielles canoniques, dont je ne marque que les six premières

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d\Omega}{d\tau}, & \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{d\Omega}{dh},\\ \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{d\Omega}{d\alpha}, & \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d\Omega}{d\beta},\\ \frac{dk}{dt} &= \frac{d\Omega}{dg}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{d\Omega}{dk}. \end{aligned}\right.$$

Ces six équations ne permettent pas, en général, de déterminer les six quantités

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &h, \quad \beta, \quad k,\\ &\tau, \quad -\alpha, \quad g, \end{aligned}\right.$$

parce que Ω renferme, outre ces quantités, encore $6n - 6$ éléments variables

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &h_3, \quad h_4, \ldots, \quad h_{n-1},\\ &l_3, \quad l_4, \ldots, \quad l_{n-1}. \end{aligned}\right.$$

Toutefois, si toutes ces quantités varient très-lentement, on pourra calculer les éléments (3) avec une grande approximation, pendant un temps assez considérable, à l'aide de quadratures.

Il n'est pas indispensable que les $6n - 6$ constantes qu'il faut ajouter aux six constantes (3), pour obtenir toutes les constantes arbitraires des intégrales, forment un système d'éléments canoniques; il suffit évidemment, pour appliquer les équations (2), que Ω soit exprimé au moyen des six éléments (3) et de $6n - 6$ autres éléments qui soient fonctions des éléments (4), sans être fonctions des éléments (3). En désignant donc par s un quelconque de ces nouveaux éléments, il devra satisfaire à ces six équations

$$[h, s] = 0, \quad [\tau, s] = 0, \quad [\beta, s] = 0, \quad [\alpha, s] = 0, \quad [k, s] = 0, \quad [g, s] = 0;$$

la première exprime que s est indépendant de τ conjugué à h, la deuxième que s est indépendant de h, etc.

La constante τ ne se trouve dans Ω que par $t+\tau$, et, sans qu'on soit obligé à aucune attention pour la détermination des $6n-6$ dernières constantes, elles seront indépendantes de τ, de sorte qu'on aura la première des équations (2)

$$(5) \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{d\Omega}{d\tau},$$

sans connaître les éléments canoniques (4). En effet, désignons les $2n-1$ constantes qui restent après τ et qui entrent dans Ω par a_1, $a_2, \ldots, a_{2n-1}$; d'après une formule générale connue, on a

$$\frac{dh}{dt} = [h, \tau]\frac{d\Omega}{d\tau} + [h, a_1]\frac{d\Omega}{da_1} + \ldots + [h, a_{2n-1}]\frac{d\Omega}{da_{2n-1}}.$$

Or, $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ étant indépendants de τ, on a

$$[h, a_1] = 0, \quad [h, a_2] = 0, \ldots,$$

et il reste bien l'équation (5). C'est une formule donnée pour la première fois par Lagrange, et qu'on trouve dans sa *Mécanique analytique* (section V, § 3).

Si l'on examine le mouvement du système par rapport au plan invariable, les $2n-2$ constantes qu'on obtiendra par les intégrations seront indépendantes de β, α; on en peut encore conclure la deuxième ligne des formules (2)

$$(6) \qquad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\alpha}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Omega}{d\beta},$$

sans être obligé de connaître les éléments (4).

Pour étudier le mouvement du système quand la fonction de forces est simplement U, nous pouvons examiner le mouvement relatif du système par rapport au plan mobile de l'équateur, ensuite le mouvement du plan de l'équateur, et enfin sa trace sur le plan invariable au moyen de la formule (6) du n° 4 (c'est une marche de calcul que je me propose d'exposer dans un autre article). La dernière constante

introduite par la dernière formule est g, et toutes les constantes obtenues auparavant par les intégrations sont évidemment indépendantes de g. Donc, sans connaître les éléments (4), on pourra, quand on ajoutera aux forces d'abord existantes des forces perturbatrices, poser la cinquième des équations (2)

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{dg}, \tag{7}$$

qui déterminera la variation de k.

9. Pour donner une application des formules précédentes, supposons, par exemple, qu'un corps, en s'approchant de notre système planétaire, vienne à le troubler; alors on prendra pour l'origine des coordonnées le centre de gravité du système dont le mouvement est rectiligne et uniforme, et l'on sait que le principe des forces vives et les trois intégrales des aires ont lieu par rapport à ce point. Les formules (6) et (7) permettront de calculer le déplacement du plan invariable; en effet, au moyen de ces formules, on peut calculer la variation de la longitude α du plan invariable et celles de k et β; par suite on peut calculer aussi la variation de l'inclinaison γ du plan invariable donnée par la formule

$$\cos\gamma = \frac{\beta}{k}.$$

Remarquons une quantité qui mérite d'être considérée; c'est la rotation élémentaire du plan invariable autour de son axe, que je désignerai par dg'. Si le nœud du plan invariable sur le plan fixe était immobile, on aurait évidemment $dg' = dg$; mais, ce nœud étant mobile, on peut considérer, dans le problème du mouvement troublé, le plan invariable comme ayant dans le temps dt un premier mouvement de rotation autour de son intersection avec sa position infiniment voisine et un second mouvement autour de l'axe de ce plan, que nous avons désigné par dg'. Alors on trouve, par la considération géométrique la plus facile,

$$dg' = dg + \cos\gamma\, d\alpha\,;$$

d'après les équations (2) on a

$$dg = -\frac{d\Omega}{dk}\,dt,$$

$$d\alpha = \frac{d\Omega}{d\beta}\,dt = -\frac{1}{k\sin\gamma}\frac{d\Omega}{d\gamma}\,dt;$$

on en conclut donc, pour la vitesse angulaire du plan invariable autour de son axe due à la perturbation,

$$\frac{dg'}{dt} = -\frac{d\Omega}{dk} - \frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}\frac{d\Omega}{d\gamma}.$$

10. Arrivons enfin aux deux problèmes dont l'analogie m'a fourni l'occasion de ce Mémoire. Dans ces deux problèmes, le système est fixé par trois coordonnées seulement. Les variables q_i, p_i, se réduisent à $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$. Les constantes arbitraires (1) se réduisent aux six premières, et sont entièrement déterminées par le système des équations (2).

1° Dans le cas d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe, et qui n'est sollicité que par des forces perturbatrices, on a les équations (2), qui se changent très-aisément en celles que Poisson a données (*Journal de l'École Polytechnique*, XVe Cahier, p. 336).

2° Dans le cas d'un corps attiré par un centre fixe, le plan invariable devient celui de l'orbite, l'équateur un plan quelconque passant par le rayon vecteur mené du corps au centre fixe; la quantité que j'ai désignée par σ représente l'angle compris entre la ligne des nœuds et le rayon vecteur; g est la distance angulaire au nœud d'un point fixe quelconque de l'orbite, lequel est ensuite censé se mouvoir en vertu de la perturbation. Mais je dis que l'on peut aussi prendre pour g la distance angulaire du périhélie à la ligne des nœuds, et que les éléments troublés seront encore fournis par les équations (2).

Faisons pour ce problème le calcul indiqué au n° 5, avec la simplification qui résulte de la supposition que les coordonnées se rapportent au plan de l'orbite; ce qui les réduit à deux seulement.

Formons les deux équations de ce numéro

$$\mathrm{H} = h, \quad \mathrm{L} = k;$$

en désignant par r le rayon vecteur, et prenant la masse du corps égale à l'unité, nous trouverons facilement qu'elles se réduisent aux deux suivantes:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - 2U = 2h,$$

$$r^2\frac{d\sigma}{dt} = k.$$

En représentant par r' et σ' les deux dérivées de r et σ, on a

$$p_1 = \frac{dT}{dr'} = r', \quad p_2 = \frac{dT}{d\sigma'} = r^2\sigma',$$

et ces deux équations deviennent

$$p_1^2 + \frac{1}{r^2}p_2^2 = 2U + 2h,$$

$$p_2 = k;$$

l'expression $V = \int(p_1 dq_1 + p_2 dq_2)$ devient

$$V = k\sigma + \int_\rho^r \sqrt{2U + 2h - \frac{k^2}{r^2}}\,dr,$$

ρ étant une constante, et l'on aura les deux intégrales finies

$$(a) \qquad \frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{dk} = g,$$

qui peuvent s'écrire

$$(b) \qquad \left\{\begin{aligned} t + \tau &= \int_\rho^r \frac{r\,dr}{\sqrt{2Ur^2 + 2hr^2 - k^2}}, \\ \sigma - g &= \int_\rho^r \frac{k\,dr}{r\sqrt{2Ur^2 + 2hr^2 - k^2}}. \end{aligned}\right.$$

Si, au lieu de prendre pour ρ une valeur constante déterminée et indépendante de h, k, on prend pour ρ la valeur minimum de r, laquelle satisfait à l'équation, où U est fonction de r,

$$(c) \qquad 2U + 2h - \frac{k^2}{r^2} = 0,$$

les deux équations (a) se confondront encore avec les équations (b). En effet, quand on prend pour ρ une quantité dépendante de h, k, les seconds membres des équations (b) doivent, en général, être augmentés de nouveaux termes; mais ces termes ont pour facteur

$$\sqrt{2U_1 + 2h - \frac{k^2}{\rho^2}},$$

U_1 étant le résultat de la substitution de ρ à la place de r dans U, et, par conséquent, ils s'annulent si ρ est racine de l'équation (c).

En faisant $r = \rho$ dans les deux équations (b), on a

$$\sigma = g, \quad t = -\tau,$$

c'est-à-dire que g représente la distance angulaire du périhélie au nœud et $-\tau$ le temps du passage de l'astre au périhélie.

Nous voyons donc que les intégrales sont exactement les mêmes quand on prend pour g la distance angulaire du nœud, ou à un point fixe du plan de l'orbite ou au périhélie. Il est évident qu'il en sera de même pour un système plus général de coordonnées où l'on aura trois intégrales

$$(d) \qquad \frac{dV}{dh} = t + \tau, \quad \frac{dV}{d\beta} = -\alpha, \quad \frac{dV}{dk} = g,$$

au lieu de deux seulement.

Donc enfin les six équations canoniques (2), relatives au mouvement troublé, qui se déduisent des trois équations (d), subsistent encore, en prenant pour g la distance du nœud au périhélie, et pour $-\tau$ le temps du passage de l'astre à ce point. Ainsi l'on voit que le périhélie a le même mouvement angulaire qu'un point du plan de l'orbite regardé comme fixe dans le mouvement non troublé.

Les formules (2) se transforment d'ailleurs très-aisément en celles que les astronomes ont coutume d'employer pour calculer les perturbations d'une planète.

Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet;

PAR M. E. CATALAN [*].

1.

Si l'on suppose

$$(1)\qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=l(n)+\varphi(n)+C,$$

on a les formules connues

$$(2)\qquad C=\int_0^1\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]dx,$$

$$(3)\qquad \varphi(n)=-\int_0^1\left[\frac{x}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]x^{n-1}\,dx.$$

Une simple identité permet de remplacer les intégrales définies par d'autres, qui se rattachent aux fonctions elliptiques.

Si, dans l'égalité (1), on change n en $2n$, et que l'on retranche, on trouve

$$(4)\qquad \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=l(2)+\varphi(2n)-\varphi(n);$$

mais, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}\ [^{**}].$$

[*] Des extraits de ce petit Mémoire ont paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (juillet 1873) et dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique* (juillet-novembre 1872).

[**] *Voir* la Note à la fin.

Par conséquent, le premier membre de l'égalité (4) équivaut à

$$l(2) - \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \ldots\right)$$
$$= l(2) - \int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+1} + x^{2n+2} - \ldots)\,dx,$$

ou à

$$l(2) - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx.$$

La relation (4) devient donc

$$\varphi(n) - \varphi(2n) = \int_1^0 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx. \tag{5}$$

Dans cette égalité (5), changeons n en $2n$, $4n$, $8n$, .., puis faisons la somme : à cause de $\varphi(\infty) = 0$, nous aurons

$$\varphi(n) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^{2n} + x^{4n} + x^{8n} + \ldots]; \tag{6}$$

ce qui est la formule annoncée.

Il en résulte, comme cas particulier,

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^2 + x^4 + x^8 + \ldots];$$

puis, par la relation (1),

$$C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^2 + x^4 + x^8 + \ldots]. \tag{7}$$

II.

On tire de la formule (6), en changeant la notation,

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[q^2 + q^4 + q^8 + q^{16} + \ldots],$$
$$\varphi(5) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[q^{10} + q^{20} + q^{40} + q^{80} + \ldots],$$
$$\varphi(9) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[q^{18} + q^{36} + q^{72} + q^{144} + \ldots],$$

. . . . . .

Soit, comme dans un autre Mémoire [*],

$$(8)\qquad F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + \ldots$$

Alors la première des séries ci-dessus égale $F(q) - q$; la deuxième égale $F(q^5) - q^5$, etc. Il résulte, des égalités précédentes,

$$\varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \ldots$$
$$= \int_0^1 \frac{dq}{1+q}\left[\varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_5 F(q^5) + \varepsilon_9 F(q^9) + \ldots - \varepsilon_1 q - \varepsilon_5 q^5 - \varepsilon_9 q^9 - \ldots\right].\ [**].$$

Or

$$\varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_5 F(q^5) + \varepsilon_9 F(q^9) + \ldots = f(q) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right),$$
$$\varepsilon_1 q + \varepsilon_5 q^5 + \varepsilon_9 q^9 + \ldots = f(q) - f(q^2) = \frac{(1-k')\omega}{4\pi}\quad [***];$$

on a donc simplement

$$(9)\qquad \varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \ldots = -\frac{1}{4}l(2) + \frac{1}{4\pi}\int_0^1 \frac{dq}{1+q}(1+k')\omega.$$

III.

Le calcul précédent, appliqué à la formule (3), donne

$$\varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \ldots$$
$$= -\int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q\,l(q)}\right](\varepsilon_1 q + \varepsilon_5 q^5 + \varepsilon_9 q^9 + \ldots),$$

---

[*] *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 76.

[**] En général, ε_n *représente l'excès du nombre des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu + 1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $4\mu - 1$. (*Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 75.)

[***] Suivant la notation de M. Bertrand,

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

(*Recherches sur quelques produits indéfinis*, pp. 74 et 76.)

ou

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \ldots \\ &\quad = -\frac{1}{4\pi}\int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q\,l(q)}\right](1-k')\omega. \end{aligned}\right.$$

Conséquemment

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q}(1+k')\omega + \int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q\,l(q)}\right](1-k')\omega = \pi\,l(2),$$

ou, après quelques réductions,

$$(11)\qquad \int_0^1 \left[2\,\frac{1-qk'}{1-q^2} + \frac{1-k'}{q\,l(q)}\right]\omega\,dq = \pi\,l(2)\ [*].$$

---

[*] Ce résultat semblera peut-être digne de remarque, si l'on fait attention que ω, k' sont des fonctions transcendantes de q, *définies* par les formules

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right) = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \ldots,$$
$$\frac{(1-k')\omega}{4\pi} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \ldots.$$

(*Recherches*, etc., p. 76.) En outre, d'après les égalités (7), (8),

$$C = 1 - \int_0^1 \frac{dq}{1+q}[-q + F(q)],$$

puis

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q}F(q) = 2 + l(2) - C,$$

ou enfin

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q}F(q) = 0{,}729\ 637\ 154\ 538\ 522\ldots.$$

Ainsi l'on peut évaluer $\int_0^1 \frac{dq}{1+q}F(q)$, bien que la transcendante $F(q)$ ne paraisse pas exprimable sous forme finie.

IV.

Pour généraliser les formules (6), (7), soit

$$(12)\quad \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu+1}+\cdots+\frac{1}{\mu+n-1}=l(\mu+n-1)+\varphi(n,\mu)+C_\mu,$$

μ étant une quantité positive et la fonction $\varphi(n,\mu)$ s'annulant, comme $\varphi(n)$, pour n infini. La *constante* C_μ, qui devient $C_1=C$ si $\mu=1$, est définie par la condition

$$(13)\qquad C_\mu=\lim\left[\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu+1}+\cdots+\frac{1}{\mu+n-1}-l(\mu+n-1)\right].$$

D'après l'équation (12), et par des transformations connues,

$$(14)\qquad \varphi(n,\mu)+C_\mu=\int_0^1\left[x^{\mu-1}\frac{1-x^n}{1-x}+\frac{1-x^{\mu+n-2}}{l(x)}\right]dx.$$

Lorsque n devient infini, cette relation se réduit à

$$(15)\qquad C_\mu=\int_0^1\left[\frac{x^{\mu-1}}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]dx.$$

Par suite,

$$(16)\qquad \varphi(n,\mu)=-\int_0^1\left[\frac{x}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]x^{\mu+n-2}\,dx;$$

et, si l'on fait $x=e^{-z}$,

$$(17)\qquad C_\mu=-\int_0^\infty\left[\frac{e^{-z}}{z}-\frac{e^{-\mu z}}{1-e^{-z}}\right]dz,$$

$$(18)\qquad \varphi(n,\mu)=\int_0^\infty\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{e^z-1}\right]e^{-(\mu+n-1)z}\,dz$$

V.

L'intégrale contenue dans l'égalité (16) représente, comme l'on sait, $\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu}$; donc

$$C_\mu = -\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu} \text{ [*]}; \tag{19}$$

et, en particulier,

$$C = -\left[\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu}\right]_{(\mu=1)}, \tag{20}$$

formule connue.

VI.

La comparaison des valeurs (2), (14) donne cette relation simple :

$$C - C_\mu = \int_0^1 \frac{1 - x^{\mu-1}}{1 - x} dx. \tag{21}$$

Il en résulte que *la différence* $C - C_\mu$ *est réductible à l'intégrale d'une différentielle rationnelle, si* μ *est commensurable.* Par exemple,

$$C - C_{\frac{1}{2}} = -2\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = -2l(2).$$

On a aussi, par la formule (20), en supposant μ inférieur à l'unité,

$$C - C_{1-\mu} = \int_0^1 \frac{1 - x^{-\mu}}{1 - x} dx,$$

et, par conséquent,

$$C_\mu - C_{1-\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{-\mu}}{1 - x} dx, \tag{22}$$

ou

$$C_\mu - C_{1-\mu} = \pi \cot \mu\pi \text{ [**]}. \tag{23}$$

---

[*] On voit que $-C_\mu$ est la fonction $Z'(\mu)$ de Legendre.

[**] Bierens de Haan, Table 3.

Ainsi la fonction C_μ sera déterminée entre $\mu = \frac{1}{2}$ et $\mu = 1$, si elle l'est pour $\mu < \frac{1}{2}$. D'ailleurs, la relation (22) équivaut à l'équation d'Euler

$$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}.$$

En effet, on tire de celle-ci

$$l\Gamma(\mu) + l\Gamma(1-\mu) = -l \sin \mu\pi,$$

puis

$$\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu} - \frac{d.l\Gamma(1-\mu)}{d\mu} = -\pi \cot \mu\pi;$$

etc.

VII.

Indépendamment de ces deux expressions de la *constante d'Euler*

$$(2) \qquad C = \int_0^1 \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right] dx,$$

$$(7) \qquad C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}[x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots],$$

on a [*]

$$C = \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}\,\frac{1}{e^{2\pi x}-1}.$$

Ces diverses formules ne semblent pas se prêter au calcul numérique de C [**]. Pour en trouver une autre un peu plus satisfaisante,

---

[*] *Note sur une formule de M. Botesu.* (*Bulletins de l'Académie*, novembre 1872.)

[**] Il en est de même d'une ingénieuse transformation, employée par Binet, et d'après laquelle

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{l(1-y)} = \int_0^1 \beta_1\,d\beta - y\int_0^1 \beta_2\,d\beta + y^2\int_0^1 \beta_3\,d\beta - \ldots,$$

en supposant

$$(1-y)^\beta = 1 - \beta_1 y + \beta_2 y^2 - \beta_3 y^3 + \ldots.$$

reprenons l'égalité (1)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = l(n) + \varphi(n) + C.$$

Comme

$$l(n) = l\frac{n}{n-1} + l\frac{n-1}{n-2} + \ldots + l\frac{2}{1},$$

on peut l'écrire ainsi

$$C = 1 - \left(l\frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(l\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \ldots - \left(l\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \ldots;$$

ou, si l'on fait

(25) $$u_n = l\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n} \quad [*]:$$

(26) $$C = 1 - \sum_2^\infty u_n.$$

Or

$$l\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + \frac{1}{3(n-1)^3} - \frac{1}{4(n-1)^4} + \ldots;$$

donc

$$\sum_2^\infty u_n = \sum_2^\infty \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{3}S_3 - \frac{1}{4}S_4 + \ldots,$$

S_2, S_3, S_4,... représentant, suivant la notation habituelle, les sommes des puissances entières, négatives, des nombres naturels. A cause de

$$\sum_2^\infty \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1,$$

la formule (26) se réduit à

(27) $$C = \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{4}S_4 - \frac{1}{5}S_5 + \ldots.$$

Les termes du second membre, alternativement positifs et négatifs,

---

[*] *Comptes rendus*, t. XLIII, p. 628. *Mélanges mathématiques*, p. 165.

décroissent indéfiniment; donc la série est convergente. Pour qu'elle le devienne davantage, ajoutons au second membre

$$-l(2)+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=0 \quad [*].$$

De là résulte

$$(28)\quad C=1-l(2)+\frac{1}{2}(S_2-1)-\frac{1}{3}(S_3-1)+\frac{1}{4}(S_4-1)-\ldots \quad [**].$$

VIII.

En combinant l'équation (28) avec celle-ci :

$$(29)\quad 1-C=\frac{1}{2}l(2)+\frac{1}{3}(S_3-1)+\frac{1}{5}(S_5-1)+\frac{1}{7}(S_7-1)+\ldots \quad [***],$$

on trouve un résultat assez curieux, savoir

$$(30)\quad l(2)=(S_2-1)+\frac{1}{2}(S_4-1)+\frac{1}{3}(S_6-1)+\frac{1}{4}(S_8-1)+\ldots.$$

Pour vérifier cette relation (dans laquelle on pourrait introduire les Nombres de Bernoulli), il suffit de se rappeler que

$$S_{2p}=\frac{1}{\Gamma(2p)}\int_0^\infty \frac{z^{2p-1}dz}{e^z-1}.$$

---

[*] Artifice employé par Legendre.

[**] Cette formule, qui n'est pas nouvelle, est comprise dans une équation donnée par Legendre (*Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 432) et reproduite par M. Serret (*Calcul différentiel* de Lacroix, t. II, p. 334). Mais la démonstration de Legendre est inadmissible. En effet, cet illustre Géomètre y fait usage d'une série dont *le premier terme* est $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ (p. 430). Du reste, on connaît divers procédés, très-expéditifs, qui permettent de calculer C avec un grand nombre de décimales.

[***] Legendre, p. 434. Serret, p. 335.

On conclut de cette valeur

$$S_{2p-1} = \frac{1}{\Gamma(2p)}\left[\int_0^\infty \frac{z^{2p-1}dz}{e^z-1} - \int_0^\infty e^{-z}z^{2p-1}dz\right] = \frac{1}{\Gamma(2p)}\int_0^\infty \frac{z^{2p-1}dz}{e^z(e^z-1)}.$$

L'égalité (30) devient

$$l(2) = 2\int_0^\infty \frac{dz}{e^z(e^z-1)}\left[\frac{z}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2\ldots6} + \cdots\right];$$

ou, si l'on somme la série,

$$l(2) = \int_0^\infty \frac{e^z + e^{-z} - 2}{ze^z(e^z-1)}\,dz = \int_0^\infty \frac{e^z-1}{z}\,e^{-2z}dz;$$

etc.

Le même calcul, appliqué à la relation (29), la transforme en

$$1 - C - \tfrac{1}{2}\,l(2) = \int_0^\infty \frac{dz}{e^z(e^z-1)}\left[\frac{z^2}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.5} + \cdots\right];$$

ou, par la sommation de la série, en

$$1 - C - \tfrac{1}{2}\,l(2) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^z - e^{-z} - 2z}{ze^z(e^z-1)}\,dz.$$

Au moyen de l'expression précédente de $l(2)$, cette égalité se réduit a

$$1 - C = \int_0^\infty \frac{e^z - 1 - z}{ze^z(e^z-1)}\,dz;$$

ou encore à

$$C = \int_0^\infty \frac{(z-1)e^z + 1}{ze^z(e^z-1)}\,dz = \int_0^\infty \left(\frac{e^z}{e^z-1} - \frac{1}{z}\right)e^{-z}dz,$$

formule connue.

IX.

A cause des équations (3), (6), on a

$$(31)\quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu}+x^{4\mu}+x^{8\mu}+\ldots\right]+\int_0^1\left[\frac{x}{1-x}+\frac{1}{l(x)}\right]x^{\mu-1}dx=0,$$

au moins *lorsque μ est entier*. Afin de voir si la même relation subsiste pour toutes les valeurs positives de cette variable, prenons l'équation dérivée

$$(32)\quad \int_0^1 \frac{dx\,l(x)}{1+x}\left[2x^{2\mu}+4x^{4\mu}+8x^{8\mu}+\ldots\right]+\int_0^1\left[\frac{x\,l(x)}{1-x}+1\right]x^{\mu-1}dx=0.$$

Si l'on remplace μ par 2μ, on trouve aisément

$$(33)\quad 2\int_0^1 \frac{dx\,l(x)}{1+x}\,x^{2\mu}+\int_0^1\left[\frac{l(x)}{1-x}+\frac{1}{x}\right](x^{\mu}-2x^{2\mu})dx=0;$$

ou, en supprimant une intégrale nulle,

$$\int_0^1 \frac{dx\,l(x)}{1-x}\,x^{\mu}=4\int_0^1 \frac{dx\,l(x)}{1-x^2}\,x^{2\mu+1}.$$

Il est visible que cette équation est identique. Il en est donc de même pour l'égalité (33).

Si maintenant, dans cette égalité (33), on change μ en 2μ, 4μ, 8μ,..., et qu'en même temps on multiplie par 2, 4, 8,..., on retombe sur la relation (32). Donc celle-ci est *générale*, et l'équation (31) l'est pareillement.

Par suite, la formule (16) peut être écrite ainsi :

$$(34)\quad \varphi(n,\mu)=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2(\mu+n-1)}+x^{4(\mu+n-1)}+x^{8(\mu+n-1)}+\ldots\right]\quad [*].$$

---

[*] Si μ est *entier*, le second membre représente $\varphi(\mu+n-1)$ (6); donc, dans ce cas, $\varphi(n,\mu)=\varphi(\mu+n-1)$. Cette relation s'accorde avec l'égalité (12).

X.

De l'équation (31), on conclut

$$\int_0^1 \frac{x^{2\mu}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right](x^{\mu-1} - x^{2\mu-1})\,dx = 0,$$

ou

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{2\mu}}{1+x} + \frac{x^{\mu} - x^{2\mu}}{1-x}\right)dx + \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{2\mu-1}}{l(x)}\,dx = 0.$$

La seconde intégrale a pour valeur

$$l\left(\frac{1}{2}\right) = -l(2) \quad [*]:$$

donc

$$(35) \qquad \int_0^1 \frac{1 + x - 2x^{\mu+1}}{1-x^2}\,x^{\mu}\,dx = l(2),$$

ou, par le changement de x^2 en x,

$$(36) \qquad \int_0^1 \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}} + x^{\frac{\mu}{2}} - 2x^{\mu}}{1-x}\,dx = 2\,l(2).$$

Cette intégrale définie, assez remarquable, peut évidemment en donner d'autres. Au lieu d'écrire ces nouvelles formules, nous allons tirer, de l'équation (36), une relation entre les transcendantes C_μ.

On a

$$(15) \qquad C_\mu = \int_0^1 \left[\frac{x^{\mu-1}}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right]dx;$$

et, par conséquent,

$$(37) \qquad C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} + x^{\mu-\frac{1}{2}} - 2x^{2\mu-1}}{1-x}\,dx.$$

---

[*] Bierens de Haan, Table 168.

Le second membre se déduit du premier membre de la relation (36), par le changement de $\frac{\mu-1}{2}$ en $\mu-1$; et, puisque l'intégrale (36) est indépendante de μ, on a

$$C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = 2l(2). \tag{38}$$

Lorsque $\mu = \frac{1}{2}$, cette relation générale se réduit à

$$C_{\frac{1}{2}} - C_1 = 2l(2) \text{ (VI)}.$$

XI.

Si nous réduisons en série la fraction $\frac{1+x-2x^{\mu+1}}{1-x^2}$, nous aurons

$$\frac{1+x-2x^{\mu+1}}{1-x^2} = \sum_1^\infty (1+x-2x^{\mu+1})x^{2n-2}.$$

L'équation (35) devient donc

$$\sum_1^\infty \int_0^1 (1+x-2x^{\mu+1})x^{\mu+2n-2}\,dx = l(2),$$

ou

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{\mu+2n-1} + \frac{1}{\mu+2n} - \frac{1}{\mu+n}\right) = l(2), \tag{39}$$

ou encore

$$\sum_1^\infty \frac{\mu^2+2n\mu+n}{(\mu+n)(\mu+2n-1)(\mu+2n)} = l(2). \tag{40}$$

Chacune de ces deux formules donne, on le voit, une infinité de développements de $l(2)$. Elles subsistent même pour $\mu = 0$; car, dans ce cas, la première se réduit à

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = l(2);$$

et la seconde, transformée de la première, devient

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \cdots = l(2).$$

La convergence des séries (39), (40), assez faible déjà si $\mu = 0$, diminue quand ce paramètre augmente. Par exemple, pour $\mu = 99$, la formule (39) devient

$$\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} - \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{103} - \frac{1}{101}\right) + \left(\frac{1}{104} + \frac{1}{105} - \frac{1}{102}\right) + \cdots = l(2).$$

On voit que les termes du premier membre ne décroissent guère plus rapidement que ceux de la série *divergente*

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} + \cdots,$$

du moins pour les premières valeurs de n. Mais, quand ce nombre grandit, le terme général de la série (40) tend vers $\frac{2\mu + 1}{2n(2n-1)}$: la série est donc convergente.

XII.

Soient

$$(41) \qquad A_\mu = C_{\mu+\frac{1}{2}} - C_{2\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-\frac{1}{2}} - x^{2\mu-1}}{1-x}\,dx,$$

$$(42) \qquad B_\mu = C_\mu - C_{2\mu} = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{2\mu-1}}{1-x}\,dx,$$

d'après l'égalité (37). Pour essayer de déterminer A_μ, B_μ, observons que la relation (38) donne

$$A_\mu + B_\mu = 2l(2),$$

et que, d'un autre côté,

$$A_\mu - B_\mu = -\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}\left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)}{1-x}\,dx,$$

ou, plus simplement,

$$(43)\qquad A_\mu - B_\mu = -2\int_0^1 \frac{x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx.$$

Par conséquent,

$$A_\mu = l(2) - \int_0^1 \frac{x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx,\quad B_\mu = l(2) + \int_0^1 \frac{x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx;$$

ou, si l'on veut,

$$(44)\qquad A_\mu = \int_0^1 \frac{1-x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx,\quad B_\mu = \int_0^1 \frac{1+x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx.$$

L'intégrale (43) n'étant pas exprimable sous forme finie, du moins en général, il en est de même pour les quantités A_μ, B_μ. Néanmoins, la dernière recherche nous donne ces formules de *réduction :*

$$(45)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\mu-\frac{1}{2}} - x^{2\mu-1}}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\mu-\frac{1}{2}} - x^{2\mu-1}}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^{2\mu-1}}{1+x}\,dx. \end{cases}$$

XIII.

Prenons l'équation connue

$$(46)\qquad l\Gamma(\mu) = (\mu - \tfrac{1}{2})\,l(\mu) - \mu + \tfrac{1}{2}\,l(2\pi) + \varpi(\mu),$$

dans laquelle $\varpi(\mu)$ représente la *fonction de Binet*, savoir :

$$(47)\qquad \varpi(\mu) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu x}}{x}\,dx.$$

Il en résulte, à cause de la formule (19) et de $\int_0^\infty e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\mu}$,

$$(48)\qquad C_\mu = \frac{1}{2\mu} - l(\mu) - \varpi'(\mu)\ [*],$$

$$(49)\qquad \varpi'(\mu) = -\frac{1}{2\mu} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)e^{-\mu x}\,dx.$$

---

[*] Dans la Note insérée aux *Comptes rendus*, le terme $-l(\mu)$ a été omis.

Si l'on fait $e^x = \frac{1}{\alpha}$, la dernière équation devient

$$(50) \qquad \varpi'(\mu) = -\frac{1}{2\mu} - \int_0^1 \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{l(\alpha)}\right] \alpha^{\mu-1}\, d\alpha,$$

et, par l'égalité (31),

$$(51) \qquad \varpi'(\mu) = -\frac{1}{2\mu} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \ldots\right].$$

Conséquemment (48),

$$(52) \qquad C_\mu = \frac{1}{\mu} - l(\mu) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \ldots\right];$$

puis, comme ci-dessus,

$$(7) \qquad C_1 = C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^2 + x^4 + x^8 + \ldots\right].$$

XIV.

Dans la relation

$$(38) \qquad C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} - 2l(2),$$

substituons aux quantités C_μ, $C_{\mu+\frac{1}{2}}$, $C_{2\mu}$ leurs valeurs

$$(52) \left\{ \begin{aligned} C_\mu &= \frac{1}{\mu} - l(\mu) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \ldots\right], \\ C_{\mu+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\mu+\frac{1}{2}} - l\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu+1} + x^{4\mu+2} + x^{8\mu+4} + \ldots\right], \\ C_{2\mu} &= \frac{1}{2\mu} - l(2\mu) - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{4\mu} + x^{8\mu} + x^{16\mu} + \ldots\right]; \end{aligned} \right.$$

nous aurons

$$\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}+l\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}}+\int_0^1\frac{dx}{1+x}\left[-x^{2\mu}-x^{2\mu+1}+x^{4\mu}-x^{4\mu+2}+x^{8\mu}-x^{8\mu+4}+\ldots\right]=0,$$

ou

$$\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}+l\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}}+\int_0^1 dx\left[-x^{2\mu}+x^{4\mu}(1-x)+x^{8\mu}(1-x+x^2-x^3)\right.$$
$$\left.+x^{16\mu}(1-x+x^2-\ldots-x^7)+\ldots\right]=0.$$

On peut remplacer $\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}=\frac{2}{2\mu+1}$ par $2\int_0^1 x^{2\mu}dx$. De plus, $l\frac{\mu}{\mu+\frac{1}{2}}=-l\frac{2\mu+1}{2\mu}=-l\left(1+\frac{1}{2\mu}\right)$: donc la relation précédente devient

$$l\left(1+\frac{1}{2\mu}\right)=\int_0^1 dx\left[x^{2\mu}+x^{4\mu}(1-x)+x^{8\mu}(1-x+x^2-x^3)+\ldots\right].$$

Si l'on intègre chaque terme, et que l'on remplace 2μ par a, on a enfin

$$(53)\quad\left\{\begin{aligned}l\left(1+\frac{1}{a}\right)=&\frac{1}{a+1}+\left(\frac{1}{2a+1}-\frac{1}{2a+2}\right)\\&+\left(\frac{1}{4a+1}-\frac{1}{4a+2}+\frac{1}{4a+3}-\frac{1}{4a+4}\right)\\&+\left(\frac{1}{8a+1}-\frac{1}{8a+2}+\ldots+\frac{1}{8a+8}\right)\\&+\left(\frac{1}{16a+1}-\ldots+\frac{1}{16a+16}\right)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Dans ce nouveau développement, a est une quantité *positive* quelconque. $a=1$ donne l'expression ordinaire du logarithme de 2. Si l'on suppose $a=\frac{1}{2}$, $a=2$, on trouve

$$l(3)=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots-\frac{1}{12}\right)+\ldots,$$

$$l\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{18}+\ldots-\frac{1}{24}\right)+\ldots.$$

XV.

De l'équation (51), on conclut

$$\varpi(\mu) - \varpi(1) = -\tfrac{1}{2}l(\mu) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[\frac{x^{2\mu}-x^2}{2} + \frac{x^{4\mu}-x^4}{4} + \frac{x^{6\mu}-x^6}{8} + \ldots\right],$$

ou, parce que $\varpi(1) = 1 - \frac{1}{2}l(2\pi)$ (46),

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(\mu) &= 1 - \tfrac{1}{2}l(2\mu\pi) \\ &\quad + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[\frac{x^{2\mu}-x^2}{2} + \frac{x^{4\mu}-x^4}{4} + \frac{x^{6\mu}-x^6}{8} + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Pour simplifier cette formule, prenons $\mu = \frac{1}{2}$:

$$\varpi(\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2}l(\pi) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[\frac{x-x^2}{2} + \frac{x^2-x^4}{4} + \frac{x^4-x^8}{8} + \ldots\right],$$

ou

$$\varpi(\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2}l(\pi) - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \ldots\right].$$

Mais, à cause de $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, on tire, de la relation (51),

$$\varpi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}l(2);$$

donc l'égalité précédente se réduit à

$$0 = 1 - l\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[-x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \ldots\right].$$

Combinant celle-ci avec la relation (54), on obtient

$$(55)\quad \varpi(\mu) = \tfrac{1}{2}l\frac{\pi}{8\mu} + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[-x + \frac{x^{2\mu}}{2} + \frac{x^{4\mu}}{4} + \frac{x^{8\mu}}{8} + \ldots\right].$$

Voilà donc une expression de la transcendante $\varpi(\mu)$, qui subsiste

pour toutes les valeurs positives de μ, et qui dépend d'une série dont la convergence augmente indéfiniment avec cette variable. Au moyen de l'identité

$$0 = \frac{1}{2} l\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}(1-x) \quad [*],$$

on peut écrire ainsi la dernière formule

$$(56) \qquad \varpi(\mu) = -\tfrac{1}{2} l(2\mu\pi) + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}\left[-1 + \frac{x^{2\mu}}{2} + \frac{x^{4\mu}}{4} + \frac{x^{8\mu}}{8} + \ldots\right].$$

De celle-ci, l'on conclut ces deux résultats simples :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}\left[-1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \cdots\right] = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}\left[-1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} + \cdots\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} l\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

XVI.

Si, dans la relation (46), on substitue à $\varpi(\mu)$ sa valeur (56), on trouve

$$(57) \quad l\Gamma(\mu) = (\mu - 1)\, l(\mu) - \mu + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\, l(x)}\left[-1 + \frac{x^{2\mu}}{2} + \frac{x^{4\mu}}{4} + \frac{x^{8\mu}}{8} + \ldots\right];$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} l\Gamma(\mu) &= (\mu - 1) l(\mu) - \mu \\ &\quad - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x) l(x)}\left[\frac{1 - x^{2\mu}}{2} + \frac{1 - x^{4\mu}}{4} + \frac{1 - x^{8\mu}}{8} + \ldots\right] \quad [**]. \end{aligned} \right.$$

En général,

$$\int_0^1 \frac{dx\,(1 - x^q)}{(1+x)\, l(x)} = l \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+2}{2}\right)} \quad [***];$$

---

[*] Bierens de Haan, Table 171.

[**] Est-il nécessaire de rappeler que

$$-1 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} - \ldots ?$$

[***] Bierens de Haan, Table 171.

donc

$$\int_0^1 \frac{dx(1-x^{2\mu})}{(1+x)l(x)} = l\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+1)} = -l\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}.$$

Appliquant cette transformation à chacune des parties de l'intégrale (58), nous aurons

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[\frac{1-x^{2\mu}}{2}+\frac{1-x^{4\mu}}{4}+\frac{1-x^{8\mu}}{8}+\ldots\right]$$
$$= -l\Gamma(\tfrac{1}{2}) - \left[\frac{1}{2}l\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}+\frac{1}{4}l\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}+\frac{1}{8}l\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}+\ldots\right],$$

ou bien

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[\frac{1-x^{2\mu}}{2}+\frac{1-x^{4\mu}}{4}+\frac{1-x^{8\mu}}{8}+\ldots\right]\\ &\qquad = -l\left\{\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots\right\};\end{aligned}\right.$$

puis, au lieu de la formule (58),

$$(60)\quad \Gamma(\mu) = \mu^{\mu-1}e^{-\mu}\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots.$$

XVII.

On tire, de cette égalité (60) :

$$\Gamma(2\mu) = (2\mu)^{2\mu-1}e^{-2\mu}\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(8\mu+1)}{\Gamma(8\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots,$$

$$[\Gamma(\mu)]^2 = \mu^{2\mu-2}e^{-2\mu}\pi\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]\left[\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\cdots:$$

et, par la division,

$$\frac{\Gamma(2\mu)}{[\Gamma(\mu)]^2} = 2^{2\mu-1}\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+1)},$$

ou

$$(61)\quad \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\mu)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}},$$

formule de Legendre.

XVII.

On sait, et il est d'ailleurs évident [*], que

$$e = \lim \frac{n}{\sqrt{1.2\ldots n}},$$

quand n est un nombre entier, croissant indéfiniment. Une transformation de l'égalité (60) va nous permettre de généraliser cette propriété.

Le produit des facteurs fractionnaires peut être écrit ainsi :

$$\left[\frac{\mu\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(2\mu)\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4\mu)\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\ldots$$

Or :

$$\mu^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{4}}\mu^{\frac{1}{8}}\ldots = \mu, \quad 2^{\frac{1}{4}}4^{\frac{1}{8}}8^{\frac{1}{16}}\ldots = 2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}}\ldots = 1;$$

donc

$$(62)\quad \Gamma(\mu) = 2\sqrt{\pi}\,\mu^{\mu}e^{-\mu}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\ldots.$$

Appliquons la formule de Legendre à chacun des facteurs du produit indéfini

$$(63)\qquad P_{\mu} = \left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\ldots;$$

nous aurons

$$P_{\mu} = \left[\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)}\,\frac{2^{2\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu)\Gamma(2\mu)}{\Gamma(4\mu)}\,\frac{2^{4\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu)\Gamma(4\mu)}{\Gamma(8\mu)}\,\frac{2^{8\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{8}}\ldots,$$

ou

$$P_{\mu} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\mu)}{[\Gamma(2\mu)]^{\frac{1}{2}}}\,2^{\mu}\times\frac{\Gamma(2\mu)}{[\Gamma(4\mu)]^{\frac{1}{4}}}\,2^{\mu}\times\frac{\Gamma(4\mu)}{[\Gamma(8\mu)]^{\frac{1}{8}}}\,2^{\mu}\times\ldots.$$

---

[*] Par la formule de Stirling.

Le produit des p facteurs, qui suivent immédiatement $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, est égal à

$$2^{p\mu}\frac{\Gamma(\mu)}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}}.$$

Conséquemment,

$$P_\mu = \frac{\Gamma(\mu)}{2\sqrt{\pi}}\lim\frac{2^{p\mu}}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}};$$

puis, par la formule (62),

$$e^\mu = \mu^\mu \lim\frac{2^{p\mu}}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p}}}.$$

En élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{\mu}$, on a donc

$$e = \lim\frac{2^p\mu}{[\Gamma(2^p\mu)]^{\frac{1}{2^p\mu}}}.$$

D'après la démonstration précédente, p est un nombre entier, et la fonction contenue dans le second membre est *discontinue*. Mais si nous prenons

$$y = \frac{x}{[\Gamma(x)]^{\frac{1}{x}}},$$

x étant une variable positive, la fonction *continue* y deviendra égale à la première fonction, toutes les fois que x prendra les valeurs 2μ, 4μ, 8μ,...; donc les deux fonctions tendent vers la même limite; et, en résumé,

$$(64) \qquad e = \lim\frac{x}{[\Gamma(x)]^{\frac{1}{x}}},$$

x croissant indéfiniment [*].

---

[*] Le même raisonnement est applicable à la fonction *discontinue* $Z = \frac{n}{[\Gamma(n+1)]^{\frac{1}{n}}}$; si l'on prend la fonction *continue*, auxiliaire, $z = \frac{x}{[\Gamma(x+1)]^{\frac{1}{x}}}$, les valeurs de z seront égales à celles de Z pour $x = n$. On peut donc abréger, d'une manière notable, la démonstration précédente. Néanmoins je l'ai conservée, à cause des transformations de $\Gamma(\mu)$.

Par exemple, le nombre e est la limite des quantités

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\pi}\,|^2},\quad \frac{\frac{3}{2}}{\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right]^{\frac{2}{3}}},\quad \frac{\frac{5}{2}}{\left[\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\right]^{\frac{2}{5}}},\quad \frac{\frac{7}{2}}{\left[\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\sqrt{\pi}\right]^{\frac{2}{7}}},\ldots.$$

XVIII.

Dans la formule (60), supposons que μ soit un nombre entier n. Nous aurons

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{\pi}$$
$$\times\left[\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2.4.6\ldots 4n}{1.3.5\ldots 4n-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{2.4.6\ldots 8n}{1.3.5\ldots 8n-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{1}{8}}\ldots,$$

ou, par le calcul effectué plusieurs fois,

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n^n e^{-n}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1} \\ &\times\left[\frac{2n+2\ldots 4n}{2n+1\ldots 4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4n+2\ldots 8n}{4n+1\ldots 8n-1}\right]^{\frac{1}{4}}\ldots. \end{aligned}\right.$$

On tire de cette équation

$$66)\quad e^n = \frac{(2n)^n}{1.3.5\ldots 2n-1}\left[\frac{2n+2\ldots 4n}{2n+1\ldots 4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4n+2\ldots 8n}{4n+1\ldots 8n-1}\right]^{\frac{1}{4}}\ldots.$$

Ainsi *toute puissance entière et positive de e est développable en un produit indéfini.* En particulier,

$$(67)\,[*]\qquad e = \frac{2}{1}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6.8}{5.7}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{10.12.14.16}{9.11.13.15}\right)^{\frac{1}{8}}\ldots.$$

---

[*] Cette formule, qui me paraît curieuse, ne diffère pas, au fond, de la première des égalités (56).

XIX.

Il est visible que

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\left[\frac{2n+2\ldots 4n}{2n+1\ldots 4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{2n}\left[\frac{2n}{2n-1}\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}};$$

donc la formule (65) équivaut à

$$\Gamma(n+1)=n^n e^{-n}\sqrt{2n}\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\frac{2n}{2n-1}\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]^{\frac{1}{4}}\cdots.$$

Mais, par la formule de Stirling,

$$\Gamma(n+1)=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n),$$

ε_n devenant zéro pour n infini. La comparaison de ces deux valeurs de $\Gamma(n+1)$ donne

$$(68)\left\{\begin{aligned}1+\varepsilon_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}&\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\\&\times\left[\frac{2n}{2n-1}\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]^{\frac{1}{4}}\cdots,\end{aligned}\right.$$

ou

$$(69)\left\{\begin{aligned}l(1+\varepsilon_n)=&-\frac{1}{2}l(\pi)+\frac{1}{2}l\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\right]\\&+\frac{1}{2}l\left[\frac{2n}{2n-1}\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]\\&+\frac{1}{4}l\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]+\ldots,\end{aligned}\right.$$

et comme la formule de Stirling est

$$l(1.2.3\ldots n)=nl(n)-n+\frac{1}{2}l(2\pi n)+l(1+\varepsilon_n),$$

il s'ensuit que la série (69) représente la *fonction complémentaire* $l(1+\varepsilon_n)$, fonction dont le développement, en *série divergente*, est

$$\frac{B_1}{1.2n}+\frac{B_3}{3.4n^3}+\frac{B_5}{5.6n^5}+\ldots.$$

XX.

Au moyen de la formule de Wallis, on peut encore simplifier les relations (68), (69). En effet, suivant cette formule,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\,\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\right]^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\left[\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n+2}\cdots\right]^{\frac{1}{2}};$$

donc, après une réduction évidente,

$$(70)\quad\left\{\begin{aligned}1+\varepsilon_n=&\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2n+1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n+2}\cdots\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\\&\times\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\cdots,\end{aligned}\right.$$

et

$$(71)\quad\left\{\begin{aligned}l(1+\varepsilon_n)=&-\frac{1}{2}l(2)+\frac{1}{2}l\left[\frac{2n+1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n+2}\cdots\right]\\&+\frac{1}{2}l\left[\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]+\frac{1}{4}l\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]+\ldots.\end{aligned}\right.$$

XXI.

Il est facile de voir que chacun de ces produits fractionnaires, le premier excepté, a pour limite $\sqrt{2}$. Soit

$$Q_n=\frac{2n+2}{2n+1}\,\frac{2n+4}{2n+3}\cdots\frac{4n}{4n-1};$$

et, par conséquent,

$$lQ_n = l\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) + l\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) + \cdots + l\left(1 + \frac{1}{4n-1}\right).$$

Le second membre est compris entre

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} = S_n$$

et

$$S_n - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(4n-1)^2}\right]:$$

ou, à plus forte raison, compris entre S_n et $S_n - \frac{1}{8n}$.

Or

$$S_n = \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{4n}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right];$$

donc [*]

$$\lim S_n = l(2) - \tfrac{1}{2}l(2) = \tfrac{1}{2}l(2);$$

puis

$$\lim l.Q_n = \tfrac{1}{2}l(2),$$

ou

$$\lim Q_n = \sqrt{2}.$$

Chacun des produits Q_n, Q_{2n}, Q_{4n}, ... ayant pour limite $\sqrt{2}$, il résulte de l'égalité (70) que

$$\lim\left[\frac{2n+1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{2n+3}{2n+2}\,\frac{2n+3}{2n+4}\cdots\right] = 1,$$

propriété assez visible *a priori*

---

[*] *Note sur une formule de M. Botesu.*

XXII.

On a

$$Q_n = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})\ldots(2n-\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2n+\frac{1}{2})};$$

et, par conséquent,

$$(72) \qquad \lim \frac{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2n+\frac{1}{2})} = \sqrt{2},$$

n étant un nombre entier, indéfiniment grand [*].

Le raisonnement dont nous avons fait usage ci-dessus (XVII) est encore applicable; donc, *μ étant une variable positive, indéfiniment croissante,*

$$(73) \qquad \lim \frac{\Gamma(2\mu+1)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})} = \sqrt{2};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(74) \qquad \lim \frac{\int_0^1 \theta^{2\mu}(1-\theta)^{\mu-\frac{1}{2}}\,d\theta}{\int_0^1 \theta^{2\mu-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\mu}\,d\theta} = \sqrt{2};$$

ou encore, avec la notation de Binet,

$$(75) \qquad \lim \frac{B(2\mu+1,\,\mu+\frac{1}{2})}{B(2\mu+\frac{1}{2},\,\mu+1)} = \sqrt{2}.$$

---

[*] Si l'on fait $T_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$, la fraction considérée est $\frac{T_{2n}}{T_n}$. Les valeurs du numérateur sont comprises parmi celles du dénominateur; donc il semblerait que l'on dût avoir $\lim \frac{T_{2n}}{T_n} = 1$. Mais cette conclusion serait erronée, parce que les fonctions T_n, T_{2n} deviennent infinies avec n.

Ainsi *le rapport des intégrales* $B(2\mu+1, \mu+\frac{1}{2})$, $B(2\mu+\frac{1}{2}, \mu+1)$ *qui tendent vers zéro, tend lui-même vers* $\sqrt{2}$.

XX.

De

$$Q_n = \frac{2n+2}{2n+1}\,\frac{2n+4}{2n+3}\cdots\frac{4n}{4n-1},$$

on tire

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{(4n-2)4n}{(4n-3)(4n-1)}\cdot\frac{2n}{2n-1},$$

ou

$$Q_n = Q_{n-1}\,\frac{4n-2}{4n-3}\,\frac{4n-2}{4n-1}.$$

Et comme

$$Q_1 = \frac{4}{3} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3},$$

il s'ensuit que

$$(76)\qquad \sqrt{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{10}{9}\,\frac{10}{11}\,\frac{14}{13}\,\frac{14}{15}\cdots$$

Si de cette relation (probablement connue), on rapproche la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\,\frac{8}{9}\,\frac{10}{9}\,\frac{10}{11}\cdots$$

on trouve

$$(77)\qquad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{8}{7}\,\frac{8}{9}\,\frac{12}{11}\,\frac{12}{13}\,\frac{16}{15}\,\frac{16}{17}\cdots \quad [*]$$

---

[*] On sait qu'Euler a donné un grand nombre de résultats analogues aux précédents.

XXI.

Reprenons l'équation

$$(46)\qquad l\Gamma(\mu) = \left(\mu - \frac{1}{2}\right) l(\mu) - \mu + \frac{1}{2} l(2\pi) + \varpi(\mu)$$

et comparons-la avec l'égalité (62), écrite sous la forme

$$(78)\quad \left\{ \begin{aligned} l\Gamma(\mu) &= \mu l(\mu) - \mu + l(2) \\ &\quad + \frac{1}{2} l(\pi) + \frac{1}{2} l\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right] + \frac{1}{4} l\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right] + \ldots \end{aligned} \right.$$

Il en résulte, par la soustraction,

$$(79)\quad \varpi(\mu) = \frac{1}{2} l(2\mu) + \frac{1}{2} l\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right] + \frac{1}{4} l\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right] + \frac{1}{8} l\left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right] + \ldots$$

Ce développement de la fonction de Binet serait peu propre au calcul numérique; mais l'on en conclut

$$(80)\qquad \varpi(\mu) - \frac{1}{2}\varpi(2\mu) = \frac{1}{4} l(\mu) + \frac{1}{2} l\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right],$$

relation qui donne $\varpi(2\mu)$ si $\varpi(\mu)$ est connue, et réciproquement.

La même combinaison, appliquée à la formule (55), conduit à celle-ci :

$$(81)\quad \varpi(\mu) - \frac{1}{2}\varpi(2\mu) = -\frac{1}{4} l(\mu\pi) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\,l(x)}(1 - x^{2\mu});$$

donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\,l(x)}(1 - x^{2\mu}) = -\frac{1}{2} l(\mu^2\pi) - l\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} = l\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\mu+1)};$$

ce qui est exact (XVI).

XXII.

A cause de

$$(19) \qquad C_\mu = -\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu},$$

la relation

$$(62) \quad \Gamma(\mu) = 2\sqrt{\pi}\,\mu^\mu e^{-\mu}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(2\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\Gamma(4\mu)}{\Gamma(4\mu+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots$$

équivaut à

$$2C_\mu = -2l(\mu) + [C_\mu - C_{\mu+\frac{1}{2}}] + [C_{2\mu} - C_{2\mu+\frac{1}{2}}] + [C_{4\mu} - C_{4\mu+\frac{1}{2}}] + \ldots.$$

On conclut de celle-ci

$$2C_{2\mu} = -2l(2\mu) + [C_{2\mu} - C_{2\mu+\frac{1}{2}}] + [C_{4\mu} - C_{4\mu+\frac{1}{2}}] + \ldots;$$

puis

$$(38) \qquad C_\mu + C_{\mu+\frac{1}{2}} - 2C_{2\mu} = 2l(2),$$

comme précédemment.

XXIII.

En partant de la *définition*

$$(13) \quad C_\mu = \lim\left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \ldots + \frac{1}{\mu+n-1} - l(\mu+n-1)\right],$$

jointe à cette relation (**58**), on peut trouver de nouvelles séries, *en nombre infini*, ayant pour limite $l(2)$. Posons, pour abréger,

$$u_n = \frac{1}{\mu+n-1} + \frac{1}{\mu+n-\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\mu+n-1};$$

alors

$$\lim\left[\sum_1^n u_n + l\frac{(2\mu+n-1)^2}{(\mu+n-1)(\mu+n-\frac{1}{2})}\right] = 2l(2),$$

ou

$$\sum_1^\infty u_n + \lim\left[\frac{(\mu+n-1)^2}{(\mu+n-1)(\mu+n-\frac{1}{2})}\right] = 2l(2).$$

Mais, quand n augmente indéfiniment, la fraction $\frac{(2\mu+n-1)^2}{(\mu+n-1)(\mu+n-\frac{1}{2})}$ tend vers l'unité; donc enfin

$$(82)\qquad \frac{1}{2}\sum_1^\infty\left[\frac{1}{\mu+n-1} - \frac{1}{\mu+n-\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\mu+n-1}\right] = l(2).$$

Par exemple,

$$(83)\qquad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\ldots = l(2).$$

NOTE.

L'un des derniers numéros du *Journal* de Schlömilch cite, comme *nouveauté*, une Note de M. *Unferdinger*, relative à la limite de $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$, pour $n=\infty$. Cette Note a paru dans les *Bulletins de l'Académie de Vienne* (*Sitzungsberichte der Mathematisch*), année 1867! Pour trouver la limite dont il s'agit, l'auteur emploie les *sommes des puissances négatives des nombres naturels, les Nombres de Bernoulli*, la *constante d'Euler*, etc. Si M. Unferdinger avait consulté les *Nouvelles Annales*, il aurait pu y lire, dès 1858, diverses solutions élémentaires de la *Question* 458 [*].

Toutes ces solutions, beaucoup plus simples que celle de l'hono-

---

[*] $\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = l(2)$. (*Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 434; t. XVIII, p. 195.)

rable Géomètre autrichien, sont encore *trop compliquées*. En effet, la proposition énoncée est une conséquence immédiate des relations

$$(A) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = l(2),$$

$$(B) \qquad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n}.$$

Il est vrai que, les procédés simples étant presque toujours ceux qui se présentent en dernier, c'est seulement vers 1872 que j'ai rencontré, par hasard, *l'identité* (B). [*Note sur une formule de M. Botesu.* (*Bulletins de l'Académie de Belgique.*)]

Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre;

PAR M. ALLÉGRET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont.

CHAPITRE PREMIER.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES ORDINAIRES.

1. Soit

$$f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = a \tag{1}$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre, entre la fonction inconnue x, les n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la constante arbitraire a et les dérivées partielles

$$y_1 = \frac{\partial x}{\partial x_1}, \quad y_2 = \frac{\partial x}{\partial x_2}, \ldots, \quad y_n = \frac{\partial x}{\partial x_n}. \tag{2}$$

Nous considérerons x, de même que $y_1, y_2, \ldots, y_n$, comme $n+1$ fonctions inconnues des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de n nouvelles constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jointes à la première a, et nous nous proposerons de déterminer ces fonctions de telle sorte qu'elles satisfassent identiquement et à la fois aux équations (1) et (2).

La première fonction, x, sera ce que Lagrange a appelé une *solution complète* de l'équation fondamentale (1).

2. Différentions successivement (1) par rapport aux n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et en tenant compte de la condition connue

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_{k'}} = \frac{\partial y_{k'}}{\partial x_k}, \tag{3}$$

il viendra

$$(4)\left\{\begin{array}{l}
f'(x_1)+f'(x)y_1+f'(y_1)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+f'(y_2)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}+\ldots+f'(y_n)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}=0,\\
f'(x_2)+f'(x)y_2+f'(y_1)\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}+f'(y_2)\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}+\ldots+f'(y_n)\dfrac{\partial y_2}{\partial x_n}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f'(x_{n-1})+f'(x)y_{n-1}+f'(y_1)\dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1}+f'(y_2)\dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2}+\ldots+f'(y_n)\dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n}=0,\\
f'(x_n)+f'(x)y_n+f'(y_1)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}+f'(y_2)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_2}+\ldots+f'(y_n)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}=0.
\end{array}\right.$$

Ainsi, chacune des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles où les autres fonctions n'entrent que sous forme finie.

3. Si donc on applique à chacune des équations (4) la méthode d'intégration ordinaire, on s'assurera, sans difficulté, que les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont déterminées par n intégrales du système unique de l'ordre $2n-1$,

$$\frac{dy_1}{f'(x_1)+y_1f'(x)}=\frac{dy_2}{f'(x_2)+y_2f'(x)}=\frac{dy_3}{f'(x_3)+y_3f'(x)}=\ldots=\frac{dy_n}{f'(x_n)+y_nf'(x)}$$
$$=\frac{-dx_1}{f'(y_1)}=\frac{-dx_2}{f'(y_2)}=\frac{-dx_3}{f'(y_3)}=\ldots=\frac{-dx_n}{f'(y_n)},$$

où, de même que dans les équations (4), on suppose x remplacé partout par sa valeur tirée de (1).

4. On évitera cette dernière substitution si l'on ajoute aux précédents rapports le nouveau

$$\frac{-dx}{y_1f'(y_1)+y_2f'(y_2)+\ldots+y_nf'(y_n)},$$

et qu'on considère ensuite (1) comme une intégrale des équations différentielles ainsi complétées.

Faisons, pour abréger,

$$(5)\qquad P=-[y_1f'(y_1)+y_2f'(y_2)+\ldots+y_nf'(y_n)]$$

et le système différentiel à intégrer sera

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{P}\dfrac{dy_1}{dx} = f'(x_1) + y_1 f'(x), \quad \mathrm{P}\dfrac{dy_2}{dx} = f'(x_2) + y_2 f'(x), \ldots, \\ \qquad\qquad \mathrm{P}\dfrac{dy_n}{dx} = f'(x_n) + y_n f'(x), \\ \mathrm{P}\dfrac{dx_1}{dx} = -f'(y_1), \quad \mathrm{P}\dfrac{dx_2}{dx} = -f'(y_2), \ldots, \quad \mathrm{P}\dfrac{dx_n}{dx} = -f'(y_n), \end{cases}$$

L'équation (1) en sera une première intégrale, avec a pour constante arbitraire. Il résulte des recherches de Pfaff, continuées par Jacobi et Cauchy, que le problème proposé est toujours possible et dépend uniquement de l'intégration des équations (6), et nous prendrons là notre point de départ. (*Voir* le Mémoire allemand de Jacobi *Sur l'intégration des équations aux différences partielles, Journal de Crelle*, t. XVII, ou la traduction française, *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. III.)

5. Sans effectuer complétement cette intégration, nous supposerons maintenant qu'on puisse adjoindre à (1) n autres intégrales de (6), telles que

$$(7)\quad \begin{cases} a_1 = f_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ a_2 = f_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n = f_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Les équations (1) et (7) détermineront les $n+1$ fonctions $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; mais elles ne correspondront à une même solution complète que si les valeurs obtenues $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfont aux équations (2) et, en outre, deux à deux, à la condition générale (3). Cette méthode d'intégration donne lieu à une discussion délicate qui est l'objet principal du beau Mémoire posthume de Jacobi : *Nova methodus æquationes differentiales partiales... integrandi* (*Journal de Crelle*, t. LX).

Nous allons essayer, par une autre voie, d'établir les points essentiels de cette théorie.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DU SYSTÈME AUX DÉRIVÉES ORDINAIRES AU MOYEN D'UNE SOLUTION COMPLÈTE DE L'ÉQUATION FONDAMENTALE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

6. Nous remarquerons d'abord que, si les équations (1) et (7) définissaient une même solution complète, les $n-1$ dernières intégrales de (6) s'en déduiraient immédiatement. Il suffirait, pour cela, d'écrire

$$(8)\qquad \frac{\partial x}{\partial a_1} = \frac{\partial x}{\partial a_2} : \ldots : \frac{\partial x}{\partial a_n} :: b_1 : b_2 : \ldots : b_n,$$

en désignant par $b_1, b_2, \ldots, b_n$, n constantes arbitraires dont on n'a à considérer que les rapports, ce qui permet de donner à l'une de ces constantes une valeur particulière quelconque, par exemple l'unité.

7. Pour le prouver, nous écrirons ainsi les équations (8)

$$(9)\qquad \frac{\partial x}{\partial a_1} = e^{\beta_1 + \lambda},\quad \frac{\partial x}{\partial a_2} = e^{\beta_2 + \lambda}, \ldots \quad \frac{\partial x}{\partial a_n} = e^{\beta_n + \lambda},$$

en désignant par e la base des logarithmes népériens, par λ une fonction particulière et par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les logarithmes des constantes précédentes $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Ces dernières équations détermineront toutes les $n+1$ quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et λ en fonction de l'une d'elles que nous prendrons pour variable indépendante unique.

8. Nous éliminerons les nouvelles constantes, en différentiant logarithmiquement les équations (9), ce qui donne

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial y_1}{\partial a_1} dx_1 + \dfrac{\partial y_2}{\partial a_1} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial y_n}{\partial a_1} dx_n = \dfrac{\partial x}{\partial a_1} d\lambda, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial a_2} dx_1 + \dfrac{\partial y_2}{\partial a_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial y_n}{\partial a_2} dx_n = \dfrac{\partial x}{\partial a_2} d\lambda, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial a_n} dx_1 + \dfrac{\partial y_2}{\partial a_n} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial y_n}{\partial a_n} dx_n = \dfrac{\partial x}{\partial a_n} d\lambda. \end{array}\right.$$

D'autre part, en différentiant l'identité (1) par rapport aux constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il vient

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial a_1} f'(y_1) + \frac{\partial y_2}{\partial a_1} f'(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_1} f'(y_n) = -\frac{\partial x}{\partial a_1} f'(x), \\ \frac{\partial y_1}{\partial a_2} f'(y_1) + \frac{\partial y_2}{\partial a_2} f'(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_2} f'(y_n) = -\frac{\partial x}{\partial a_2} f'(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial y_1}{\partial a_n} f'(y_1) + \frac{\partial y_2}{\partial a_n} f'(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_n} f'(y_n) = -\frac{\partial x}{\partial a_n} f'(x). \end{cases}$$

Par la comparaison des équations linéaires (10) et (11), on trouve

$$(12)\qquad \frac{-dx_1}{f'(y_1)} = \frac{-dx_2}{f'(y_2)} = \frac{-dx_3}{f'(y_3)} = \ldots = \frac{-dx_n}{f'(y_n)} = \frac{d\lambda}{f'(x)}.$$

9. Si l'on différentie de nouveau (1) par rapport aux $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et qu'on tienne compte des relations (3) ainsi que des valeurs de $f'(y_1), f'(y_2), \ldots, f'(y_n)$ tirées de (12), on obtiendra

$$\begin{aligned} f'(x_1) + y_1 f'(x) &= f'(x)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\lambda} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\lambda} + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\lambda}\right) \\ &= f'(x)\frac{dy_1}{d\lambda}, \end{aligned}$$

et de même

$$f'(x_2) + y_2 f'(x) = f'(x)\frac{dy_2}{d\lambda}, \ldots, \quad f'(x_n) + y_n f'(x) = f'(x)\frac{dy_n}{d\lambda};$$

d'où il suit

$$(13)\quad \frac{dy_1}{f'(x_1) + y_1 f'(x)} = \frac{dy_2}{f'(x_2) + y_2 f'(x)} = \ldots = \frac{dy_n}{f'(x_n) + y_n f'(x)} = \frac{d\lambda}{f'(x)}.$$

Si donc on fait

$$(14)\qquad \lambda = -\int \frac{f'(x).dx}{y_1 f'(y_1) + y_2 f'(y_2) + \ldots + y_n f'(y_n)} = \int f'(x)\frac{dx}{\mathrm{P}},$$

les équations (6) seront vérifiées par (8) ou (9) qui en sont des intégrales, ainsi que nous voulions le démontrer. (*Voir* le Mémoire de Jacobi déjà cité, § 10.)

CHAPITRE TROISIÈME.

DES CONDITIONS AUXQUELLES SONT ASSUJETTIES LES INTÉGRALES QUI DÉFINISSENT UNE MÊME SOLUTION COMPLÈTE.

10. L'une quelconque f_k des intégrales (7), que nous supposons définir une solution complète, doit évidemment donner lieu à un système différentiel analogue à (6), savoir :

$$(15)\quad \begin{cases} P_k \dfrac{dy_1}{dx} = f'_k(x_1) + y_1 f'_k(x), \ldots, & P_k \dfrac{dy_n}{dx} = f'_k(x_n) + y_n f'_k(x), \\ P_k \dfrac{dx_1}{dx} = -f'_k(y_1), \ldots, & P_k \dfrac{dx_n}{dx} = -f'_k(y_n), \end{cases}$$

où l'on pose

$$(16)\qquad P_k = -(y_1 f'_k(y_1) + y_2 f'_k(y_2) + \ldots + y_n f'_k(y_n),$$

et les équations (1) et (7) seront encore $(n+1)$ intégrales de ce nouveau système.

11. Différentions par rapport à x celle des équations (7) où entre la fonction $f_{k'}$ et remplaçons les dérivées des autres variables par leurs valeurs (15), il viendra, après la substitution (16) de P_k, l'identité

$$(17)\quad \begin{cases} f'_k(x_1) f'_{k'}(y_1) - f'_k(y_1) f'_{k'}(x_1) \\ \quad + f'_k(x_2) f'_{k'}(y_2) - f'_k(y_2) f'_k(x_2) + \ldots \\ \quad + f'_k(x_n) f'_{k'}(y_n) - f'_k(y_n) f'_{k'}(x_n) \\ \quad + y_1 [f'_k(x) f'_{k'}(y_1) - f'_k(y_1) f'_{k'}(x)] \\ \quad + y_2 [f'_k(x) f'_{k'}(y_2) - f'_k(y_2) f'_{k'}(x)] + \ldots \\ \quad + y_n (f'_k x f'_{k'} y_n - f'_k y_n f'_{k'} x) = 0, \end{cases}$$

et cette identité est manifeste lorsque l'une des deux fonctions f_k ou $f_{k'}$ se confond avec f, et l'autre avec une intégrale de (6).

12. En omettant les n relations où entre la fonction f, les intégrales (7) combinées, deux à deux, fourniront $\frac{n(n-1)}{2}$ autres iden-

tités (17). Je dis, réciproquement, que si ces dernières existent entre n intégrales convenablement choisies (7), les relations (2) et (3) s'ensuivront nécessairement.

Pour le démontrer, différentions par rapport à $x_{k'}$ l'identité

$$f_i = a_i,$$

que nous supposerons appartenir aux groupes (7) et (1), et où nous remplacerons $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les valeurs qu'on en tire. Après avoir multiplié par $f'_{i'}(y_{k'})$ (i et i' désignant deux indices quelconques qui peuvent même être nuls), et ajouté membre à membre les équations obtenues en donnant successivement à k' ses diverses valeurs depuis 1 jusqu'à n, il viendra

$$\begin{aligned}
&\left[f'_i(x_1) + \frac{\partial x}{\partial x_1} f'_i(x)\right] f'_{i'}(y_1) \\
&\quad + \left[f'_i(x_2) + \frac{\partial x}{\partial x_2} f'_i(x)\right] f'_{i'}(y_2) + \ldots + \left[f'_i(x_n) + \frac{\partial x}{\partial x_n} f'_i(y_n)\right] f'_{i'}(y_n) \\
&\quad + f'_i(y_1)\left[\frac{\partial y_1}{\partial x_1} f'_{i'}(y_1) + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} f'_{i'}(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} f'_{i'}(y_n)\right] \\
&\quad + f'_i(y_2)\left[\frac{\partial y_2}{\partial x_1} f'_{i'}(y_1) + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} f'_{i'}(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} f'_{i'}(y_n)\right] \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + f'_i(y_n)\left[\frac{\partial y_n}{\partial x_1} f'_{i'}(y_1) + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} f'_{i'}(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} f'_{i'}(y_n)\right] = 0.
\end{aligned}$$

13. Permutons ensuite, l'un dans l'autre, les indices i et i', et retranchons, membre à membre, les équations. On trouvera, en tenant compte des relations identiques (17) et après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned}
&[f'_i(x) f'_{i'}(y_1) - f'_{i'}(y_1) f'_{i'}(x)]\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} - y_1\right) \\
&\quad + [f'_i(x) f'_{i'}(y_2) - f'_i(y_2) f'_{i'}(x)]\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} - y_2\right) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + [f'_i(x) f'_{i'}(y_n) - f'_i(y_n) f'_{i'}(x)]\left(\frac{\partial x}{\partial x_n} - y_n\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{k'=1}^{k'=n} [f'_i(y_k) f'_{i'}(y_{k'}) - f'_i(y_{k'}) f'_{i'}(y_k)]\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_{k'}} - \frac{\partial y_{k'}}{\partial x_k}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on donne maintenant aux indices i et i' leurs diverses valeurs, on formera un nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ d'équations linéaires et homogènes par rapport aux binômes

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} - y_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} - y_2, \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} - y_n,$$

et

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_2}, \ldots, \quad \frac{\partial y_k}{\partial x_{k'}} - \frac{\partial y_{k'}}{\partial x_k},$$

en nombre égal à celui des équations. Ces binômes sont donc nuls, et les conditions (2) et (3) seront remplies, en admettant que le déterminant des équations précédentes ne soit pas identiquement nul, ou ne devienne pas tel, comme conséquence de quelques-unes des équations (1) et (7), où les constantes auraient des valeurs données non arbitraires, ce qui ne peut avoir lieu que dans certains cas très-particuliers que nous excluons formellement. Les conditions (17) suffisent donc, en général, pour que le système formé par les équations (1) et (7) fournisse une solution complète x de l'équation proposée (1).

14. Nous ferons

$$(18) \quad [f_k, f_{k'}] = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_{k'}}{\partial y_i} - \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \frac{\partial f_{k'}}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{i=n} y_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial f_{k'}}{\partial y_i} - \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \frac{\partial f_{k'}}{\partial x} \right).$$

Dans les applications à la dynamique, x n'entre pas dans les fonctions $f, f_1, \ldots, f_n$, et l'on a simplement

$$(19) \qquad [f_k, f_{k'}] = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_{k'}}{\partial y_i} - \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \frac{\partial f_{k'}}{\partial x_i} \right).$$

On voit, d'après ce qui précède, que, pour que le système des intégrales (7) corresponde à une solution complète de (1), il faut et il suffit que les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions

$$[f_k, f_{k'}] = 0$$

soient identiquement remplies pour toutes les combinaisons possibles, deux à deux, entre les indices différents k et k'.

CHAPITRE QUATRIÈME.

FORMATION DE NOUVELLES INTÉGRALES AU MOYEN DE DEUX PREMIÈRES.

15. Soient

$$(20)\qquad \begin{cases} f_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_1, \\ f_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_2 \end{cases}$$

deux intégrales quelconques de (6). Lorsque la condition $[f_1, f_2] = 0$ n'est pas identiquement satisfaite, les deux intégrales ne font pas partie du groupe *canonique* qui définit une même solution complète, mais il est très-remarquable que l'expression $[f_1, f_2]$ est identiquement constante, ou encore que, égalée à une constante arbitraire, elle donne nécessairement une intégrale de (6), de sorte que, si la nouvelle fonction n'est pas une combinaison particulière des fonctions f_1 et f_2, elle fournit une intégrale distincte des précédentes.

Cette troisième intégrale, combinée avec les premières, donnerait de même une quatrième intégrale, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement de toutes les intégrales de (6), qui se déduiraient, par ce calcul facile, des deux premières (20).

16. Cette curieuse propriété a été découverte par Jacobi, qui a ensuite reconnu qu'elle est une conséquence immédiate d'un théorème autrefois démontré par Poisson, dans un Mémoire *Sur la variation des arbitraires* (XVe Cahier de l'École Polytechnique, p. 281). Ce dernier géomètre avait, en effet, formé, au moyen des intégrales des problèmes de Mécanique, certaines expressions, analogues aux précédentes et indépendantes du temps. En les égalant, selon la remarque de Jacobi, à une constante arbitraire, elles peuvent donc fournir de nouvelles intégrales, et la vérification du théorème n'offre d'autre difficulté que la longueur des calculs. Celui que nous venons d'énoncer ne diffère que par la forme de celui de Poisson et de Jacobi, ou, du moins, s'y rattache de très-près.

17. Pour le montrer, nous transformerons l'équation (1) en posant

$$z = xt, \tag{21}$$

et en désignant par t une nouvelle variable et par z une nouvelle fonction. Nous désignerons, de plus, par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les dérivées de z par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de sorte qu'on aura

$$x = \frac{\partial z}{\partial t}, \quad y_1 = \frac{z_1}{t}, \quad y_2 = \frac{z_2}{t}, \ldots, \quad y_n = \frac{z_n}{t}. \tag{22}$$

L'équation (1) deviendra

$$f\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; \frac{z_1}{t}, \frac{z_2}{t}, \ldots, \frac{z_n}{t}\right) = a. \tag{23}$$

18. On déduit de (23), par la méthode précédente, le système aux différences ordinaires analogues à (6)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial x}{\partial x_1}, \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial x}{\partial x_2}, \ldots, \quad \frac{dz_n}{dt} = \frac{\partial x}{\partial x_n}, \\ &\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial x}{\partial z_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\partial x}{\partial z_2}, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = -\frac{\partial x}{\partial z_n}, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

en donnant à x sa valeur tirée de (23). Cette dernière forme est appelée *canonique*.

19. Soient maintenant α et β deux intégrales du système simultané (24) où

$$\alpha = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_n, t),$$
$$\beta = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_n, t);$$

on aura, d'après le théorème de Poisson et de Jacobi, que nous venons de rappeler ci-dessus,

$$[\alpha, \beta] = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\frac{\partial \beta}{\partial z_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial z_i}\frac{\partial \beta}{\partial x_i} = \text{const.}; \tag{25}$$

comme d'ailleurs, en désignant par (α) et (β) ce que deviennent les fonctions α et β, dans le système primitif des variables en $x, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$, on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\alpha)}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial z_2} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\alpha)}{\partial y_2}, \ldots, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial z_n} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\alpha)}{\partial y_n},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial z_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\beta)}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial z_2} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\beta)}{\partial y_2}, \ldots, \quad \frac{\partial\beta}{\partial z_n} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\beta)}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial(\alpha)}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial(\alpha)}{\partial x}, \ldots, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x_n} = \frac{\partial(\alpha)}{\partial x_n} + y_n\frac{\partial(\alpha)}{\partial y_x},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x_1} = \frac{\partial(\beta)}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial(\beta)}{\partial x}, \ldots, \quad \frac{\partial\beta}{\partial x_n} = \frac{\partial(\beta)}{\partial x_n} + y_n\frac{\partial(\beta)}{\partial x}.$$

La substitution de ces valeurs dans (25) donnera ensuite

$$[\alpha, \beta] = \frac{1}{t}[(\alpha), (\beta)] = \text{const.}$$

Mais, puisque t n'entre ni dans (α) ni dans (β), l'expression $[(\alpha), (\beta)]$ est encore égale à une constante arbitraire ou fournit une intégrale de (6), de même que (α) et (β). Le théorème de Poisson rentre immédiatement, comme cas particulier, dans le nôtre, lorsqu'on suppose

$$f'(x) = 0, \quad f'_1(x) = 0, \ldots, \quad f'_n(x) = 0,$$

ou que la fonction inconnue x n'entre pas explicitement dans les intégrales considérées.

CHAPITRE CINQUIÈME

EXPOSÉ D'UNE NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

20. Après avoir établi les relations qui existent entre une solution complète de (1) et les intégrales du système (6), nous allons maintenant faire connaître le parti qu'on en peut tirer pour effectuer la pre-

mière intégration, ou tout au moins pour en diminuer le plus possible la difficulté.

Supposons d'abord qu'on ait une première intégrale

$$(26) \qquad \varphi(x, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_1$$

des équations (6), différente de (1). Comme la condition

$$[f, \varphi] = 0$$

sera ici identiquement satisfaite, les équations (1) et (26) feront partie d'un système canonique correspondant à une même solution complète où entreront les constantes a et a_1. Nous tirerons de (1)

$$(27) \qquad y_1 = \psi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n, a)$$

et nous porterons cette valeur dans (26), qui deviendra

$$(28) \qquad f_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_2, y_3, \ldots, y_n, a) = a_1,$$

et la fonction considérée x est encore une solution complète de cette dernière équation par rapport aux $n - 1$ variables

$$x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

qui se déduit de la précédente en y considérant simplement a, a_1 et x_1 comme des constantes particulières, et $a_2, a_3, \ldots, a_n$ comme les constantes arbitraires de la nouvelle solution.

21. L'équation aux dérivées partielles (28) donnera un système de $2(n-1)$ équations correspondantes aux dérivées ordinaires, ayant pour intégrales celles du premier système (6), à l'exception de (1) qui a servi à l'élimination de y_1 et d'une intégrale dérivée de la solution x et où entreraient $\frac{\partial x}{\partial a_1}$ et la constante b_1 (*voir* n° 6).

Ainsi, si l'on pose

$$(29) \qquad P_1 = -[y_2 f_1'(y_2) + y_3 f_1'(y_3) + \ldots + y_n f_1'(y_n)],$$

et qu'on établisse les équations différentielles

$$(30)\quad \begin{cases} P_1 \dfrac{dy_2}{dx} = f_1'(x_2) + y_2 f_1'(x), \ldots, & P_1 \dfrac{dy_n}{dx} = f_1'(x_n) + y_n f_1'(x), \\ P_1 \dfrac{dx_2}{dx} = -f_1'(y_2), & P_1 \dfrac{dx_n}{dx} = -f_1'(y_n), \end{cases}$$

les intégrales de ce second système seraient connues si toutes celles du premier (6) avaient été préalablement déterminées.

Mais, réciproquement aussi, on peut faire en sorte que toute intégrale (α) de (30), où la constante arbitraire (α) est une fonction quelconque de x_1, satisfasse en même temps au système (6), en ayant recours, au besoin, à l'intégration d'une équation auxiliaire du premier ordre entre α et $\frac{dx}{dx_1}$. Nous admettrons expressément que toutes les intégrales du système (30) que nous aurons à considérer remplissent cette condition essentielle, et nous écarterons, comme inutiles, les autres. Les constantes arbitraires des intégrales employées devront donc pouvoir être assujetties à des équations linéaires aux dérivées partielles qui permettront de substituer ensuite à ces constantes des fonctions convenables. Soient $a_2, a_3, \ldots, a_n$ les $(n-1)$ nouvelles intégrales de (30) qui déterminent une même solution complète x de (28); on aura d'abord, puisque nos intégrales satisfont au système (6),

$$[a, a_k] = 0,$$

et, en outre, à cause des conditions dont nous venons de parler,

$$[a_1, a_2] = 0, \quad [a_1, a_n] = 0, \quad [a_2, a_3] = 0, \ldots$$

Le problème de l'intégration sera ainsi ramené à celui de l'équation (28).

22. La réduction du système (6) à (30) peut encore être appliquée au dernier système, dont une nouvelle intégrale permettra, de même, de diminuer d'une unité le nombre des variables indépendantes de la solution complète et de deux unités l'ordre des équations différentielles. On formera ainsi, de proche en proche, des systèmes de plus en plus réduits dont les intégrales devront satisfaire à tous ceux qui

précèdent, et les valeurs suivantes :

$$(31)\qquad \begin{cases} y_1 = \psi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_2, y_3, \ldots, y_n, a), \\ y_2 = \psi_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_3, y_4, \ldots, y_n, a, a_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \psi_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; a, a_1, \ldots, a_{n-1}), \end{cases}$$

déduites de n intégrales consécutives, correspondront aux dérivées partielles

$$(32)\qquad \begin{cases} f(x, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = a, \\ f_1(x, x_1, \ldots, x_n; y_2, \ldots, y_n, a) = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n-1}(x, x_1, \ldots, x_n; y_n, a, a_1, \ldots, a_{n-2}) = a_{n-1}. \end{cases}$$

La dernière des équations (31) et (32) est une équation ordinaire du premier ordre qui donnera par une intégration finale

$$(33)\qquad x = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

ou la solution complète cherchée. Cette valeur, toutes les autres conditions étant supposées remplies, rendra identique les équations (31) et (32), et le théorème du n° **6** fera connaître les $(n-1)$ dernières intégrales de (6), dont (32) et (33) sont les $(n+1)$ premières.

25. Les calculs seraient beaucoup abrégés si l'on pouvait obtenir à la fois plusieurs intégrales *canoniques* du système (6), ou satisfaisant, deux à deux, à la condition (n° **14**)

$$[f_k, f_{k'}] = 0.$$

On éliminerait entre ces i intégrales et l'équation (1) les i variables $y_1, y_2, \ldots, y_i$, et l'on arriverait ainsi tout de suite à l'équation

$$(34)\quad f_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_n; a, a_1, \ldots, a_{i-1}) = a_i,$$

en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_i$ les constantes des i intégrales considérées.

24. Remarquons que toute combinaison des intégrales canoniques $f, f_1, \ldots, f_i$, dans laquelle entrent $i+1$ constantes arbitraires, fournit toujours une équation canonique lorsqu'on remplace une ou plusieurs des constantes par leurs valeurs en fonction des variables.

Soient, en effet, Φ_k et $\Phi_{k'}$ ce que deviennent deux intégrales quelconques φ_k et $\varphi_{k'}$, après cette substitution de quelques-unes des constantes $a, a_1, \ldots, a_i$ par leurs valeurs $f, f_1, \ldots, f_i$. On aura identiquement

$$\begin{aligned}[\Phi_k, \Phi_{k'}] = [\varphi_k, \varphi_{k'}] &+ [f, f_1]\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial a}\frac{\partial\varphi_{k'}}{\partial a_1} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial a_1}\frac{\partial\varphi_{k'}}{\partial a}\right)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ [f_g, f_{g'}]\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial a_g}\frac{\partial\varphi_{k'}}{\partial a_{g'}} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial a_{g'}}\frac{\partial\varphi_{k'}}{\partial a_g}\right)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et, à cause des identités,

$$[f, f_1] = [f_g, f_{g'}] = \ldots = 0;$$

la formule précédente devient

$$[\Phi_k, \Phi_{k'}] = [\varphi_k, \varphi_{k'}]. \tag{35}$$

Ainsi l'on peut traiter, dans les intégrales, les constantes canoniques comme des constantes particulières, ou les remplacer, à volonté, par les fonctions connues dont elles expriment la valeur.

CHAPITRE SIXIÈME.

DU CAS OU LA FONCTION INCONNUE N'ENTRE DANS L'ÉQUATION A INTÉGRER QUE PAR SES DÉRIVÉES PARTIELLES.

25. Lorsque x n'entre pas explicitement dans (1), cette dernière sera alors

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = a. \tag{36}$$

Les équations (6) se simplifient beaucoup et deviennent

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_2}{dx_1} = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \dfrac{dy_3}{dx_1} = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3}, \ldots, & \dfrac{dy_n}{dx_1} = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{\partial y_1}{\partial y_2}, & \dfrac{dx_3}{dx_1} = -\dfrac{\partial y_1}{\partial y_3}, \ldots, & \dfrac{dx_n}{dx_1} = -\dfrac{\partial y_1}{\partial y_n}, \end{cases}$$

en prenant pour y_1 la valeur tirée de (36) en fonction des $2n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$.

La forme (37) est précisément celle des équations de la Dynamique, quand on leur applique la transformation d'Hamilton.

26. D'après ce qui a été dit dans le Chapitre précédent, il suffira de déterminer successivement $n-1$ intégrales de (37), en réduisant de deux unités, à chaque intégration, l'ordre du système différentiel, et n'introduisant que des intégrales satisfaisant aux systèmes réduits et à tous les précédents. La dernière intégrale sera

$$f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_n; a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) = a_{n-1}$$

ou, en résolvant par rapport à y_n,

$$y_n = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}).$$

Cette équation du premier ordre, où $y_n = \frac{\partial x}{\partial x_n}$, est intégrable, et donnera x par la quadrature

$$x = a_n + \int \psi_n dx_n.$$

27. Si l'on fait abstraction d'une fonction déterminée des autres variables et constantes, on voit que la nouvelle constante a_n n'entre dans x que par voie d'addition. Les $n-1$ dernières intégrales de (37) deviendront ici (n° **6**)

$$\frac{\partial x}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial x}{\partial a_2} = b_2, \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial a_{n-1}} = b_{n-1},$$

attendu qu'on a

$$\frac{\partial x}{\partial a_n} = 1.$$

28. En Dynamique, l'équation (36) prend ordinairement la forme

$$(38)\qquad \frac{\partial x}{\partial t} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial x_n}\right),$$

où le temps t n'entre pas dans le second membre. Pour ramener cette dernière à la précédente, il suffit de poser, en désignant par a une constante arbitraire,

$$(39)\qquad x = at + \xi,$$

et l'équation (38) devient identique à (36), en faisant

$$(40)\qquad \frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi}{\partial x_1} = y_1, \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = \frac{\partial \xi}{\partial x_n} = y_n.$$

Cette équation (36) n'est autre que l'intégrale *des forces vives* dans le système différentiel de l'ordre $2n$ qui correspond à l'équation aux dérivées partielles (38), savoir :

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, & \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, & \dfrac{dy_n}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}, \\[2ex] \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial y_1}, & \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial y_2}, \ldots, & \dfrac{dx_n}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial y_n}, \end{cases}$$

et par la substitution (39) le système (41) est ramené à (37) ou à l'ordre $2n-2$. L'intégrale conjuguée à a, $\left(\dfrac{\partial x}{\partial a} = b\right)$ ou à celle des forces vives deviendra

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = -(t - t_0),$$

en désignant par t_0 la constante arbitraire du temps.

29. Plus généralement encore, si l'on proposait d'intégrer l'équation

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k; y_1, y_2, \ldots, y_k) = \psi(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n; y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n),$$

dont (38) n'est qu'un cas particulier, on poserait

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k; y_1, y_2, \ldots, y_k) = a,$$
$$\psi(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n; y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n) = a,$$

et l'on intégrerait séparément ces deux équations aux dérivées partielles. La première donnerait une solution à $k-1$ constantes et la seconde une autre à $n-k-1$ constantes différentes. En ajoutant les deux solutions et en plus une nouvelle constante arbitraire, on obtiendra la solution complète de l'équation considérée.

50. Observons que la méthode d'intégration développée dans ces deux derniers Chapitres n'est qu'une généralisation de celle que Lagrange a exposée dans la *Théorie des fonctions analytiques* (première Partie, Chap. XVI, n°s 92 et 93), pour le cas de deux variables indépendantes. Après avoir formé un système identique à (6), l'illustre géomètre ramène ensuite l'intégration au premier ordre par un procédé qui ne diffère pas, au fond, du nôtre, et demande une intégrale unique du système (6), ici réduit au troisième ordre. Lagrange s'est aussi beaucoup préoccupé du rôle des deux autres intégrales de ce dernier système, dont une paraît superflue. Il dit à ce sujet (XXe Leçon sur le *Calcul des fonctions*, édit. de 1806, p. 386) : « *Cette difficulté, je l'avoue, m'a longtemps tourmenté.* »

D'après ce qu'on a vu, il suffirait de déterminer alors deux intégrales f, f_1, par la condition d'identité

$$[f, f_1] = 0,$$

et la troisième s'en déduirait ensuite par de simples différentiations; mais ces liens si remarquables entre les intégrales de (6) ont été mis en évidence avec la plus grande généralité par Jacobi, qui, après avoir rapproché la belle découverte d'Hamilton en Dynamique des résultats obtenus précédemment par Lagrange et Pfaff, a fait faire ainsi des progrès considérables à cette partie du Calcul intégral.

CHAPITRE SEPTIÈME

DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE ET DES SOLUTIONS SINGULIÈRES.

31 Après avoir déterminé l'intégrale complète

$$x = F(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{42}$$

de l'équation (1), si l'on remplace l'une des constantes arbitraires, a_n par exemple, par une fonction quelconque des autres,

$$a_n = \chi(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{43}$$

on pourra supposer ensuite que ces dernières $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ deviennent des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, déterminées par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} F'(a_1) + \chi'(a_1) F'(a_n) = 0, \\ F'(a_2) + \chi'(a_2) F'(a_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F'(a_{n-1}) + \chi'(a_{n-1}) F'(a_n) = 0. \end{array}\right. \tag{44}$$

32. Les dérivées partielles de x conserveront la même forme, et l'on aura, à cause des conditions (44),

$$\frac{\partial x}{\partial x_k} = F'(x_k). \tag{45}$$

La valeur de x, fournie par les substitutions précédentes, satisfera donc aux mêmes équations aux dérivées partielles que (42). Ce sera une solution de l'équation (1) avec une fonction arbitraire χ de $n-1$ quantités, ou ce que Lagrange a appelé une *solution générale* de cette équation.

33. Autrement encore, posons

$$(46) \qquad F'(a_1) = 0, \quad F'(a_2) = 0, \ldots, \quad F'(a_i) = 0,$$

puis éliminons $a_1, a_2, \ldots, a_i$ entre ces dernières et (42), la nouvelle valeur de x ne renfermera plus que $n - i$ constantes arbitraires, et continuera à satisfaire à l'équation (1) et aux mêmes équations aux dérivées partielles que la solution complète précédente (42). Observons toutefois que, si l'on prend les n dérivées partielles de la première valeur de x (42), puis qu'on résolve les équations obtenues par rapport aux constantes arbitraires, on formera avec (42) un système canonique de $n + 1$ équations satisfaisant, deux à deux, aux conditions

$$[a_k, a_{k'}] = 0.$$

Il n'en est plus de même de la solution définie par l'ensemble des équations (42) et (46) et que j'appellerai, avec quelques auteurs, *singulière*. Elle correspond bien encore à $n + 1$ équations aux dérivées partielles à $n - i$ constantes arbitraires, telles que

$$(47) \qquad a = f, \quad a_1 = f_1, \ldots, a_{n-i} = f_{n-i}$$

et

$$(48) \qquad 0 = f_{n-i+1}, \quad 0 = f_{n-i+2}, \ldots, \quad 0 = f_n,$$

où les dernières, en nombre i, ne contiennent plus de constantes arbitraires; mais, quoique toutes ces équations soient des intégrales de (6), elles ne satisferont plus, en général, identiquement à la condition $[f_k, f_{k'}] = 0$, et la théorie précédente est ici en défaut, comme il est facile de s'en assurer.

34. Par des combinaisons préalables faites entre les mêmes équations, on peut regarder, néanmoins, les premières (47) comme canoniques et remplissant, deux à deux, la condition $[f_k, f_{k'}] = 0$, et les

i dernières (48) comme provenant de l'élimination de a_{n-i+1}, $a_{n-i+2}, \ldots,$ a_n, entre les i intégrales canoniques de (6)

$$(49) \qquad a_{n-i+1} = \varphi_{n-i+1}, \quad a_{n-i+2} = \varphi_{n-i+2}, \ldots, \quad a_n = \varphi_n,$$

et leurs conjuguées non canoniques (n° **6**)

$$(50) \qquad 0 = \frac{\partial x}{\partial a_{n-i+1}}, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial a_{n-i+2}}, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial a_n},$$

d'où les autres constantes seraient éliminées au moyen des premières intégrales (47). De la sorte, les équations (48) remplaceront les $2i$ intégrales (49) et (50) du système (6), et la méthode du Chapitre V devient applicable aux $i+1$ équations aux dérivées partielles

$$a = f, \quad 0 = f_{n-i+1}, \quad 0 = f_{n-i+2}, \ldots, \quad 0 = f_n,$$

qui sont compatibles, bien que le caractère discriminant n'ait plus lieu entre ces équations prises deux à deux. Les expressions $[f_k, f_{k'}]$ appliquées aux équations (48) ne peuvent fournir cependant que des combinaisons des mêmes équations et sont, par suite, susceptibles de devenir identiquement nulles, après substitution de la solution singulière considérée. Si donc on suppose que les dernières équations (48) soient connues, et que, de plus, les conditions nécessaires dont nous venons de parler soient remplies, on éliminera entre (48) et (1), comme plus haut, les dérivées partielles $y_1, y_2, \ldots, y_i$, et l'on formera une équation unique aux variables $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$, dont l'intégration dépendra d'un système aux dérivées ordinaires d'ordre $2n - 2i$, ayant pour intégrales les $n - i + 1$ équations canoniques (47). Ces dernières seront communes à ce dernier système et au premier (6), conjointement avec les intégrales particulières (48). Par la méthode exposée dans ce Mémoire, les i intégrales non canoniques (48) pourront ainsi servir, en général, à abaisser l'ordre du système (6) de $2i$ unités, et la détermination de la solution singulière correspondante ne demandera, au plus, que des intégrations auxiliaires d'ordre i (n^{os} **21** et **22**), comme dans le cas des solutions complètes,

lorsqu'on donne i premières intégrales canoniques. En différentiant ensuite par rapport aux constantes la solution singulière obtenue, on formera, par le procédé du Chapitre II, de nouvelles intégrales restreintes de (6) au nombre de $n-i+1$. Enfin la même solution à $n-i$ constantes arbitraires fournirait, comme au n° **51**, d'autres intégrales de l'équation (1) où entrerait une fonction arbitraire de $n-i-1$ quantités.

Réponse à la Note de M. J. Bertrand relative à l'article : Sur de prétendues inadvertances de Lagrange [*];

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Cette Note du savant Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences n'a qu'un seul défaut : elle manque totalement d'exactitude.

M. J. Bertrand se trompe quand il m'oppose, comme justifiant les critiques adressées à Lagrange par Poinsot dans son Mémoire de 1827, les quelques lignes qui terminent, dans la *Mécanique analytique*, le paragraphe consacré à la composition des rotations autour d'axes concourants et à celle des moments relatifs aux mêmes axes [**].

Voici ces lignes; je les copie dans le tome Ier de la *deuxième édition*, publié en 1811 par Lagrange et indiqué expressément par Poinsot :

« Cette composition (des momens) suit aussi les mêmes règles que celle des mouvemens rectilignes. On aurait pu la déduire immédiatement de la composition des rotations instantanées en substituant les momens aux rotations qu'*elles* produisent, comme Varignon a substitué les forces aux mouvemens rectilignes. »

L'erreur de M. J. Bertrand vient de ce qu'il n'a pensé qu'à la *troisième édition*, où l'on a remplacé *elles*, que j'ai souligné, par *ils*. Ce changement, dont rien n'avertit le lecteur, peut faire croire que Lagrange parle de *rotations produites par les moments*, comme Poinsot l'a supposé à tort.

On voit qu'il s'agit, au contraire, des *moments produits par les rotations*, conformément aux idées de Lagrange; de sorte qu'il n'existe en réalité aucune inadvertance dans ce passage.

[*] *Voir* p. 81-98 et 181-182 de ce volume.

[**] *Nouvelle édition*, revue et augmentée par l'auteur. Paris, 1811-1815, t. I, p. 57-62. — *Troisième édition*, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand. Paris, 1853-1855, t. Ier, p. 52-58.

J'ose espérer que M. J. Bertrand voudra bien reconnaître que je n'ai pas été injuste envers Poinsot en m'abstenant de citer, à l'appui de son Mémoire de 1827, un texte fautif publié en 1853.

Il faut également que je rétablisse la vérité en ce qui concerne la Note de 1846.

Lagrange, après avoir donné la formule générale de l'équilibre d'un système quelconque de forces, avec la manière de faire usage de cette formule [*], ajoute que « rien n'oblige, dans cette méthode, à se servir de coordonnées rectangles plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps [**] ».

Ce que Poinsot a voulu prouver est spécifié par lui-même en ces termes : « Il n'est pas exact de dire que, dans cette méthode analytique, *rien n'oblige à se servir de coordonnées rectangles plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps* ». (Note de 1846, n° 7.)

Mais il avait oublié de se conformer, dans ses calculs à l'appui de cette thèse, aux indications données par Lagrange sur la manière de faire usage de la formule générale de l'équilibre. J'ai montré, dans mon travail *Sur de prétendues inadvertances de Lagrange*, qu'en réparant cette omission l'assertion signalée comme inexacte par Poinsot se trouve parfaitement justifiée.

M. J. Bertrand paraît croire que dans cette Note de 1846 il s'agit de je ne sais quelle autre inadvertance; que personne n'a jamais mis en doute l'assertion ci-dessus de Lagrange; que Poinsot n'a même fait autre chose qu'indiquer les précautions à prendre pour le cas où l'on voudrait ne pas faire usage de coordonnées rectangles. Toutes ces suppositions sont contredites par les citations qui précèdent.

En résumé, rien de ce que contient cette Note de M. J. Bertrand n'est de nature à disculper Poinsot d'avoir attaqué une illustre mémoire avec aussi peu de circonspection.

---

[*] *Mécanique analytique* (les trois éditions), Ire Partie, 2e Section, art. 1-10.

[**] *Ibid.*, art. 11.

Sur les singularités des courbes de quatrième classe;

PAR M. LAGUERRE.

1. Une courbe de quatrième classe K possède vingt-huit points doubles δ et vingt-quatre points de rebroussement ρ. Il existe en outre dans son plan vingt et une droites P telles, que la première polaire de chacune d'elles, relativement à K, se décompose en un point p et une conique résiduelle ; aux vingt et une droites P correspondront donc vingt et un points remarquables p, que nous aurons à considérer en même temps que les points singuliers.

Je rappellerai à ce sujet que les soixante-treize points δ, ρ et p sont les points communs aux trois courbes

$$2S = \frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dz} - 3T\frac{dS}{dz} = 0,$$

où S et T désignent respectivement l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme $U = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)$ qui, égalée à zéro, donne l'équation mixte de la courbe K [*].

2. Étant données deux équations à une inconnue, de degré m, $F = 0$ et $F' = 0$ déterminant par leurs racines deux systèmes de points situés sur une même droite (*ou deux faisceaux de droites passant par un même point*), je dirai que ces systèmes (*ou ces faisceaux*) sont *harmoniques*, si l'invariant quadratique des deux formes F et F′ est nul; cette notion est, on le voit, une simple extension de la notion bien connue relative à deux systèmes de deux points (*ou à deux faisceaux de deux droites*).

[*] *Voir* (*Comptes rendus*, 16 mars 1874) la Note accompagnant la présentation de mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie plane.*

Cela posé,

$$(1) \qquad (a, b, c, \ldots, h, k, l) = 0$$

et

$$(2) \qquad (a', b', c', \ldots, h', k', l') = 0$$

étant les équations mixtes de deux courbes de $n^{ième}$ classe K^n et K'^n, il est clair que le lieu des points d'où l'on voit ces courbes suivant deux faisceaux harmoniques s'obtient en égalant à zéro l'invariant quadratique des deux formes (1) et (2); ce lieu est donc une courbe du $n^{ième}$ degré ayant pour équation

$$(3) \qquad (I) = al' - nbK' + \frac{n(n-1)}{1.2}ch' + \ldots + la' = 0,$$

et je la désignerai sous le nom de *courbe harmonique* des deux courbes K^n et K'^n.

A ce sujet, je ferai remarquer que, si n est impair, I ne change pas quand on remplace respectivement a par $a + \lambda a'$, b par $b + \lambda b'$,...; si donc C^n est la courbe harmonique de K^n et de K'^n, ce sera également la courbe harmonique de deux quelconques des courbes du faisceau déterminé par K^n et K'^n, et je dirai que c'est la courbe harmonique de ce faisceau.

3. Cela posé, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Étant donnée une courbe de quatrième classe* K, *si l'on considère les différentes droites que l'on peut mener par un point* M, *leurs premières polaires, relativement à* K, *forment un faisceau de courbes de troisième classe dont la* courbe harmonique *est la droite polaire du point* M, *relativement à la courbe du quatrième ordre* $\mathfrak{S}$ *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

Démonstration. — Soient, comme ci-dessus, $U = (a, b, c, d, e)^4 = 0$ l'équation mixte de la courbe K; S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U. On sait que la courbe $\mathfrak{S}$ a pour équation $S = 0$.

Pour simplifier les calculs, je supposerai la forme U réduite à sa forme canonique, en sorte que l'on aura simplement

$$U = \lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4,$$
$$H = m\lambda^4 + (1 - 3m^2)\lambda^2\mu^2 + m\mu^4,$$
$$S = 1 + 3m^2 \quad \text{et} \quad T = m - m^3.$$

En appelant ξ, η, ζ les coordonnées du point M, désignons par

$$\omega = ux + vy + wz = 0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0$$

les équations de deux quelconques des droites qui se croisent au point M.

Désignons de plus par $\Delta = S^3 - 27T^2$ le discriminant de la forme U, et par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ les équations mixtes des premières polaires des deux droites précédentes relativement à K ; d'après la formule (13) donnée dans mon *Mémoire sur l'application des formes binaires* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 120), on aura les équations suivantes :

$$\Delta\alpha = \mathfrak{r} + \frac{3\omega}{2} m\mathfrak{r}', \qquad \Delta\alpha_0 = \mathfrak{r}_0 + \frac{3\omega_0}{2} m\mathfrak{r}',$$

$$\Delta\beta = m\mathfrak{y} + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{y}', \quad \Delta\beta_0 = m\mathfrak{y}_0 + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{y}',$$

$$\Delta\gamma = m\mathfrak{r} + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{r}', \quad \Delta\gamma_0 = m\mathfrak{r}_0 + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{r}',$$

$$\Delta\delta = \mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2} m\mathfrak{y}', \qquad \Delta\delta_0 = \mathfrak{y}_0 + \frac{3\omega}{2} m\mathfrak{y}',$$

où $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{y}'$ ont la même signification que dans le Mémoire précité (p. 119), et $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{y}_0$ représentent les quantités analogues à $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{y}$, dans lesquelles u, v, w ont été remplacés par u_0, v_0 et w_0.

Cela posé, en désignant par $I = 0$ l'équation de la courbe harmonique du faisceau formé par les polaires des droites qui se croisent au point M, on aura

$$I = \alpha\delta_0 - 3\beta\gamma_0 + 3\gamma\beta_0 - \delta\alpha_0,$$

et

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta^2 \mathrm{I} &= (1+3m^2)\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{y}\mathfrak{x}_0) \\ &\quad + \frac{9}{4}(m-m^3)\,[\mathfrak{x}'(\omega\mathfrak{y}_0 - \omega_0\mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'(\omega\mathfrak{x}_0 - \omega_0\mathfrak{x})]; \end{aligned}\right.$$

on a d'ailleurs

$$1+3m^2 = \mathrm{S}, \quad m - m^3 = \mathrm{T},$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{y}\mathfrak{y}_0 = \frac{\Delta}{12}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right),$$

ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{S}_0 = \xi\frac{d\mathrm{S}}{dx} + \eta\frac{d\mathrm{S}}{dy} + \zeta\frac{d\mathrm{S}}{dz},$$

$$\mathrm{T}_0 = \xi\frac{d\mathrm{T}}{dx} + \eta\frac{d\mathrm{T}}{dy} + \zeta\frac{d\mathrm{T}}{dz},$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{y}\mathfrak{x}_0 = \frac{\Delta}{12}(3\mathrm{S}^2\mathrm{S}_0 - \mathrm{S}4\mathrm{T}\mathrm{T}_0),$$

puis

$$\mathfrak{x}'(\omega\mathfrak{y}_0 - \omega\mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'(\omega\mathfrak{x}_0 - \omega_0\mathfrak{x}) = \Delta(2\mathrm{S}\mathrm{T}_0 - 3\mathrm{T}\mathrm{S}_0);$$

substituant ces valeurs dans (4), il viendra

$$\Delta^2\mathrm{I} = \frac{\mathrm{S}\Delta}{12}(3\mathrm{S}^2\mathrm{S}_0 - \mathrm{S}^4\mathrm{T}\mathrm{T}_0) + \frac{9\mathrm{T}\Delta}{4}(2\mathrm{S}\mathrm{T}_0 - 3\mathrm{T}\mathrm{S}_0),$$

d'où, réductions faites,

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{S}_0}{4} = \frac{1}{4}\left(\xi\frac{d\mathrm{S}}{dx} + \eta\frac{d\mathrm{S}}{dy} + \zeta\frac{d\mathrm{S}}{dz}\right).$$

Ce qui démontre la proposition énoncée.

4. En particulier, considérons une droite P, telle que sa première polaire, relativement à K, se décompose en un point p et une conique. Si l'on prend un point quelconque M de cette droite, le réseau formé par les premières polaires des droites qui se croisent en M comprend

en particulier le point p et la conique résiduelle ; on en conclut que la courbe harmonique du faisceau passe par le point p. D'ailleurs cette courbe est la première polaire de M relativement à $\mathfrak{S}$; donc, réciproquement, d'après un théorème connu, la droite polaire de p, relativement à $\mathfrak{S}$, passe par le point M, et, comme ce point a été pris arbitrairement sur la droite P, cette droite n'est autre que la polaire de p.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si la première polaire d'une droite* P, *relativement à la courbe de quatrième classe* K, *se décompose en un point p et une conique résiduelle, la droite* P *est la droite polaire de p, relativement à la courbe du quatrième ordre* $\mathfrak{S}$, *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

D'où encore cette conséquence :

Les vingt-et-une droites P *sont les droites polaires relativement à* $\mathfrak{S}$ *des vingt-et-un points p.*

La proposition précédente peut se démontrer directement ainsi qu'il suit :

En désignant par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$ l'équation mixte de la première polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$, je remarque que, si cette polaire se décompose en une conique et un point p, pour les coordonnées de ce point, on devra avoir $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, la tangente à la polaire étant en ce point entièrement indéterminée.

On a d'ailleurs, pour un tel point (n° 1), $\mathfrak{x}' = 0$ et $\mathfrak{y}' = 0$; d'après la formule (13) déjà citée de mon précédent Mémoire, on aura donc

$$a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} = 0,\ b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} = 0,\ c\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} = 0,\ d\mathfrak{x} + e\mathfrak{y} = 0.$$

Il en résulte que $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ sont nuls; autrement (a, b, c, d, e) serait une puissance exacte, c'est-à-dire que les quatre tangentes menées du point p à K se confondraient en une seule, ce qui est impossible.

Les coordonnées du point p satisfont donc aux quatre équations

$$\mathfrak{x}' = 0,\ \mathfrak{y}' = 0,\ \mathfrak{x} = 0,\ \mathfrak{y} = 0,$$

ou bien

$$2S\frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0,$$

$$\omega\frac{d\Delta}{dx} - 12u\Delta = 0, \quad \omega\frac{d\Delta}{dy} - 12v\Delta = 0.$$

Remplaçons, dans les deux dernières relations, Δ par sa valeur $S^3 - 27T^2$, puis $\frac{dT}{dx}$ et $\frac{dT}{dy}$ par leurs valeurs tirées des deux premières; il viendra simplement, après avoir supprimé le facteur Δ,

$$\omega\frac{dS}{dx} = 4Su, \quad \omega\frac{dS}{dy} = 4Sv,$$

d'où encore, en vertu du théorème sur les fonctions homogènes,

$$\omega\frac{dS}{dz} = 4Sw.$$

La droite polaire du point p, relativement à S, a pour équation

$$X\frac{dS}{dx} + Y\frac{dS}{dy} + Z\frac{dS}{dz} = 0$$

ou, en vertu des relations précédentes,

$$uX + vY + wZ = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

5. Étant données deux courbes de $n^{ième}$ classe K^n et K'^n, désignons par I l'invariant quadratique qui, égalé à zéro, donne l'équation de la courbe harmonique des courbes données; si le polynôme I est identiquement nul, K^n et K'^n jouissent de la propriété d'être vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques. Je dirai alors qu'elles forment un *couple harmonique;* si, de plus, n est impair, deux quelconques des courbes du faisceau (K^n, K'^n) formeront un couple harmonique, et je dirai que le *faisceau est harmonique.*

Étant donnée une courbe K^n, dont l'équation mixte est

$$(a, b, \ldots, k, l) = 0,$$

on peut rechercher s'il est possible de lui adjoindre une autre courbe de même classe K'^n, qui constitue avec elle un couple harmonique.

En désignant par $(a', b', \ldots, k', l') = 0$ l'équation mixte de K'^n, il faut déterminer les polynômes $a', b' \ldots$, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$I = al' - nbk' + \ldots = 0.$$

Nous disposons, à cet effet, des $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients de l'équation de K'^n; la courbe représentée par $I = 0$ étant de degré n, il en résulte que les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients inconnus doivent satisfaire à un nombre égal d'équations linéaires sans second membre; j'appellerai Δ le déterminant de ce système d'équations.

6. Il est important maintenant de distinguer le cas où n est pair et le cas où n est impair.

Si n est impair, le système d'équations est toujours satisfait pour

$$a = a', \quad b = b' \ldots;$$

par conséquent on a toujours $\Delta = 0$. De plus, on sait que, si l'on a une solution qui diffère de celle-là, il y en a une infinité; en d'autres termes, comme je l'ai déjà fait observer, les diverses courbes qui constituent avec la courbe donnée un couple harmonique forment un faisceau.

On pourra donc supposer que l'un des coefficients inconnus est nul, et l'on aura à trouver $\frac{(n+1)(n+2)-1}{2}$ inconnues satisfaisant à $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations linéaires sans second membre, ce qui, en général, exige que deux relations entre les coefficients soient satisfaites.

On peut donc énoncer cette proposition :

Étant donnée une courbe de classe impaire, deux conditions doivent

être satisfaites pour que cette courbe fasse partie d'un réseau harmonique.

On voit facilement, d'après cela, qu'un système de deux points ne peut former un couple harmonique, ce qui, géométriquement, était évident *a priori*.

Relativement aux courbes de troisième classe, il est très-remarquable que les conditions nécessaires soient toujours satisfaites et que toute courbe de troisième classe fasse partie d'un faisceau harmonique. Cela résulte de la proposition suivante, que j'ai démontrée dans le *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires*, etc., déjà cité (*Journal de Mathématiques*, p. 108) :

Une courbe quelconque de troisième classe et sa hessienne sont vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques.

7. Si la courbe K^n est de classe paire, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle fasse partie d'un couple harmonique est que $\Delta = 0$; et je vais d'abord chercher comment on peut facilement former ce déterminant.

Représentons symboliquement, comme l'ont fait MM. Aronhold et Clebsch, par $(au + bv + cw)^2 = 0$ l'équation tangentielle de K^n, en convenant, dans le développement du trinôme, de remplacer le produit $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ par le coefficient $a_{\alpha\beta\gamma}$; l'équation mixte de cette courbe sera

$$[a\mu - b\lambda + c(\lambda y - \mu x)]^n = 0 \quad \text{ou} \quad [(cy - b)\lambda + (a - cx)\mu]^n = 0.$$

Semblablement, l'équation mixte d'une seconde courbe K'^n sera symboliquement

$$[(\gamma y - \beta)\lambda + (\alpha - \gamma x)\mu]^n = 0.$$

L'équation symbolique de la courbe harmonique des deux courbes données sera, par suite,

$$[(cy - b)(\alpha - \gamma x) - (\gamma y - \beta)(a - cx)]^n = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$[x(b\gamma - c\beta) + y(c\alpha - a\gamma) + z(a\beta - b\alpha)]^n = 0.$$

Si l'on suppose que K^n et K'^n constituent un couple harmonique, les divers coefficients du développement de ce trinôme doivent être nuls.

On aura, par suite, les diverses équations

$$\begin{aligned}
&(a\beta - b\alpha)^n = 0, \quad (a\beta - b\alpha)^{n-1}(c\gamma - c\beta) = 0, \ldots,\\
&(b\gamma - c\beta)^n = 0, \quad (b\gamma - c\beta)^{n-1}(a\beta - b\alpha) = 0, \ldots,\\
&(c\alpha - a\gamma)^n = 0, \quad (c\alpha - a\gamma)^{n-1}(a\beta - b\alpha) = 0, \ldots;
\end{aligned}$$

et Δ sera le déterminant de ces $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations, si l'on y considère comme inconnues les diverses puissances de α, β et γ.

J'ai calculé par ce procédé la valeur de Δ, relative à la courbe générale de quatrième classe; je transcris ici l'expression de cet invariant, qui, comme je le ferai voir tout à l'heure, présente quelque intérêt dans l'étude des points de rebroussement de la courbe.

Pour simplifier l'écriture, j'ai adopté les notations de M. Salmon (*Higher curves*, p. 251), et puis pour équation de la courbe K l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&au^4 + bv^4 + cw^4 + 6fv^2w^2 + 6gw^2u^2 + 6hu^2v^2\\
&\quad + 12lu^2vw + 12mv^2wu + 12nw^2uv + 4a_2u^3v\\
&\quad + 4a_3u^3w + 4b_1v^3u + 4b_3v^3w + 4c_1w^3u + 4c_2w^3v = 0.
\end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}
0 & c & b & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & -b_3 \\
c & 0 & a_1 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & -c_1 & 0 & 0 \\
b & a & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\
6f & 0 & 0 & a & h & g & 2l & -a_3 & -a_2 & -3n & 0 & 0 & -3m & 0 & 0 \\
0 & 6g & 0 & h & b & f & -b_3 & 2m & -b_1 & 0 & -3l & 0 & 0 & -3n & 0 \\
0 & 0 & 6h & g & f & c & -c_2 & -c_1 & 2n & 0 & -a & -3m & 0 & 0 & -3l \\
0 & 0 & 0 & -2a_1 & 4m & -2c_1 & -n & 2g & -l & 3c_2 & 0 & -3h & -3f & 0 & 3a_2 \\
0 & 0 & 0 & -2a_2 & -2b_1 & 4n & -m & -l & 2h & -3f & 3a_3 & 0 & 3b_3 & -3g & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4l & -2b_3 & -2c_2 & 2f & -n & -m & 0 & 3g & 3b_1 & 0 & 3c_1 & -3h \\
0 & 0 & -4b_1 & 2n & 0 & 0 & 0 & c_2 & -f & 0 & c_1 & b_3 & 0 & -c & 3m \\
-4c_2 & 0 & 0 & 0 & 2l & 0 & -g & 0 & a_3 & c_1 & 0 & a_2 & 3n & 0 & -b \\
0 & 4a & 0 & 0 & 0 & -2m & b_1 & -h & 0 & b & a_2 & 0 & -a & 3l & 0 \\
0 & -4c_1 & 0 & 2m & 0 & 0 & 0 & -f & b_3 & 0 & 3n & -b & 0 & c_2 & b_1 \\
0 & 0 & 4a_2 & 0 & -2n & 0 & c_1 & 0 & -g & -c & 0 & 3l & c_2 & 0 & a_1 \\
-4b & 0 & 0 & 0 & 0 & -2l & -h & a_2 & 0 & 3m & -a & 0 & b_1 & a_1 & 0
\end{vmatrix}$$

8. Une courbe du sixième ordre étant déterminée par vingt-sept points, on ne peut pas, en général, faire passer une telle courbe par les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe K; mais on peut, à cet égard, énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe soient situés sur une courbe du sixième ordre est que l'invariant* Δ' *soit nul.*

Ce théorème résulte immédiatement de la proposition suivante :

Si les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe K *sont situés sur une courbe du sixième ordre, elle fait partie d'un couple harmonique; la réciproque est également vraie.*

Démonstration. — Soit $U = (a, b, c, d, e) = 0$ l'équation mixte de K; supposons que cette courbe constitue un couple harmonique avec la courbe K′ dont l'équation mixte est $(a', b', c', d', e') = 0$.

En désignant respectivement par S, T, I et J l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U, l'invariant quadratique de U et de U′, et l'expression $a'\frac{dT}{da} + b'\frac{dT}{db}, \ldots$, j'ai démontré [*Mémoire de Géométrie analytique*, n° 37 (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XVII)], que la courbe du dixième ordre, représentée par l'équation

$$2SJ - 3TI = 0,$$

passait par les vingt-quatre points de rebroussement et les vingt-huit points doubles de K. Les deux courbes K et K′ constituant un couple harmonique, on a identiquement $I = 0$; la courbe du dixième ordre se décompose donc en deux courbes du quatrième et du sixième ordre $S = 0$ et $J = 0$. D'ailleurs $\mathfrak{S}$ ne rencontre K qu'en ses points de rebroussement; les vingt-huit points doubles se trouvent donc sur la courbe du sixième ordre $J = 0$.

Réciproquement, si les vingt-huit points doubles sont situés sur une courbe du sixième ordre C dont l'équation soit $W = 0$, je dis que K fait partie d'un couple harmonique. Pour le démontrer, je m'appuierai sur la proposition suivante (*Mémoire de Géométrie analytique*, n° 38) :

Si, par les cinquante-deux points singuliers d'une courbe de qua-

trième classe K, *on fait passer une courbe quelconque du dixième ordre; cette courbe rencontre* K *en seize points distincts des points singuliers; les tangentes menées à* K *en ces seize points touchent une courbe de quatrième classe.*

Puisque les vingt-huit points δ sont une courbe du sixième ordre C, l'ensemble des courbes $\mathfrak{S}$ et C détermine une courbe du dixième ordre passant par les cinquante-deux points singuliers; $\mathfrak{S}$ ne rencontre d'ailleurs K qu'en ses points de rebroussement; par suite, en vertu du théorème précédent, les tangentes menées à K aux points où cette courbe est coupée par C (abstraction faite des points doubles) forment un polygone Q dans lequel on peut inscrire une infinité de courbes de quatrième classe.

$U' = 0$ désignant l'équation mixte d'une quelconque des courbes inscrites dans ce polygone, on aura nécessairement

$$2SJ - 3TI = SW$$

d'où

$$S(2J - W) = 3TI,$$

et par suite, en désignant par μ un facteur numérique,

$$S = 3\mu I \quad \text{et} \quad T = \mu(2J - W).$$

Considérons maintenant la courbe de quatrième classe $U - 3\mu U' = 0$, inscrite évidemment dans le polygone Q; l'invariant I relatif à cette courbe et à K est égal à $S - 3\mu I$ et, par suite des relations précédentes, il est identiquement nul.

Les courbes déterminées par les équations

$$U = 0 \quad \text{et} \quad U - 3\mu U' = 0$$

constituent donc un couple harmonique et la proposition est complétement démontrée.

Mémoire sur le problème des trois corps;

PAR M. ALLÉGRET,
Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Clermont.

INTRODUCTION.

L'étude analytique du mouvement de la Lune attirée à la fois par la Terre et par le Soleil a donné, depuis près de deux siècles, à cause de ses difficultés, une grande célébrité au problème qui fait l'objet de ce Mémoire. Il est très-aisé, en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité des trois astres ou de l'un d'eux, de former un système différentiel du douzième ordre que quatre intégrales abaissent au huitième. De nouvelles intégrations semblent ensuite nécessaires pour approcher davantage de la solution rigoureuse; mais les efforts tentés dans cette voie n'ont pas permis de répondre, au sujet des équations différentielles, à ce défi de Clairaut : « *Intègre maintenant qui pourra !* »[*].

Il est bien remarquable cependant que, sans qu'il soit besoin de recourir à ce moyen presque désespéré, on puisse notablement restreindre le nombre et la difficulté des premières intégrations, par la décomposition des équations différentielles du mouvement en systèmes d'ordre inférieur, liés les uns aux autres.

C'est ainsi que Lagrange, dans le premier chapitre de l'*Essai sur le problème des trois corps* (couronné en 1772), et, plus tard, Jacobi (*Élimination des nœuds*, 1842) sont parvenus à réduire la question au

[*] *Réflexions sur le problème des trois corps* (*Journal des savants* de 1759, p. 576.)

septième ordre des différences et à une quadrature finale. Comme les systèmes différentiels considérés par ces deux illustres géomètres ne contiennent le temps que par sa différentielle, ils sont susceptibles d'être abaissés au sixième ordre, par l'élimination de cette variable sous forme de quadrature, et tous les travaux postérieurs n'ont pas pu, depuis, diminuer davantage l'ordre des équations du problème, malgré quelques modifications de forme ou de méthode.

Dans la première Section de ce Mémoire, nous étendons la réduction précédente à un nombre quelconque de corps, $n+1$, soumis à leurs attractions mutuelles. Nous montrons que l'ordre $6n$ des équations du mouvement peut toujours être abaissé de 6 unités, c'est-à-dire de deux unités de plus que par la simple adjonction des quatre intégrales des aires et des forces vives.

Dans la Section suivante, après avoir rattaché les mêmes équations à une autre aux dérivées partielles à $3n$ variables indépendantes, nous éliminons deux des dérivées à l'aide de deux intégrales transformées en équations aux dérivées partielles et compatibles avec la première. Le problème est ainsi ramené à l'intégration d'un système aux dérivées ordinaires d'ordre $6(n-1)$, et cela d'une manière extrêmement générale, sans qu'il soit besoin de faire un choix particulier de variables ou de plans coordonnés. Quelques intégrales de ce dernier système combinées entre elles et avec la quatrième intégrale, dont il n'a pas été fait usage, détermineraient, par le procédé connu, la fonction caractéristique, à l'aide de laquelle la solution s'achèverait enfin par de simples différentiations.

Cette méthode, appliquée au problème des trois corps, n'exigerait plus qu'une ou deux intégrales d'un système canonique du sixième ordre.

Dans la troisième et la dernière section, nous proposons une réduction encore plus grande. Après avoir successivement annulé deux et trois constantes des intégrales des aires, nous faisons voir que ces équations deviennent compatibles avec l'équation fondamentale et admettent une solution singulière à trois constantes arbitraires, laquelle peut être déduite de l'intégration d'un système différentiel du quatrième ordre; et quoique le nombre des constantes annulées soit supérieur à deux, le mouvement conserve toute sa généralité, pourvu

qu'on ajoute à la fraction des forces certains termes convenables que nous apprenons à former.

Ces résultats intéressants paraissent avoir échappé à Jacobi [*], dont la méthode d'intégration, telle qu'il l'a présentée dans son beau Mémoire posthume *Nova methodus*, ne peut pas conduire, dans le problème des trois corps, à un abaissement inférieur au huitième ordre. Nous donnons donc plus d'extension à cette nouvelle théorie en faisant contribuer toute intégrale connue, mais prise d'une manière restreinte, à une diminution de deux unités dans l'ordre des équations. La méthode que nous exposons convient à toutes les équations différentielles qui, comme celles de la Dynamique, sont susceptibles de dépendre d'une seule équation aux dérivées partielles, et cette précieuse propriété procure d'autres avantages, notamment pour le calcul approché des intégrales. Mais nous avons réservé ce dernier sujet de nos recherches pour un Mémoire spécial, où nous avons l'intention d'examiner quelques points importants de la théorie de la Lune.

SECTION PREMIÈRE.

DU MOUVEMENT DES CORPS LIBRES SOUMIS A LEURS ATTRACTIONS MUTUELLES.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

1. Lorsque plusieurs points matériels en nombre $n+1$ s'attirent ou se repoussent mutuellement suivant une même loi donnée, fonction de la distance, on peut faire abstraction d'un mouvement général

---

[*] L'illustre géomètre prussien s'est exprimé ainsi au § 56 de son Mémoire : « Non omnibus casibus, quoties habetur integrale novum..... ordinem differentiationum duabus unitatibus deprimere licet. Ita non fit ut altero et tertio integrali quod principium arearum concernit, duas variabiles cum earum differentialibus eliminare liceat, ideoque *quatuor* unitatibus iste ordo deprimatur. » (*Journal de Crelle*, t. LX.)

rectiligne et uniforme du système et supposer le centre de gravité en repos. Après avoir mené par ce point trois axes coordonnés rectangulaires de direction fixe, appelons μ la masse du premier mobile, ξ, η, ζ ses coordonnées, et respectivement μ_1, ξ_1, η_1, ζ_1; μ_2, ξ_2, η_2, ζ_2, ...; μ_n, ξ_n, η_n, ζ_n les masses et les coordonnées des n autres corps. Désignons, en outre, par ρ_k et $\rho_{k,k'}$ la fonction dont la dérivée exprime la loi d'attraction entre μ, μ_k et μ_k, $\mu_{k'}$.

2. Les équations du mouvement seront, après avoir posé,

$$1 \qquad U = \mu(\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 + \ldots + \mu_n\rho_n) + \Sigma\mu_k\mu_{k'}\rho_{k,k'};$$

$$2 \qquad \left\{\begin{array}{lll} \mu\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial\xi}, & \mu\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial\eta}, & \mu\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial\zeta}, \\ \mu_1\dfrac{d^2\xi_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial\xi_1}, & \mu_1\dfrac{d^2\eta_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial\eta_1}, & \mu_1\dfrac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial\zeta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \mu_n\dfrac{d^2\xi_n}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial\xi_n}, & \mu_n\dfrac{d^2\eta_n}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial\eta_n}, & \mu_n\dfrac{d^2\zeta_n}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial\zeta_n}. \end{array}\right.$$

3. Les coordonnées ξ, η, ζ, ..., ζ_n sont liées entre elles par les relations connues, relatives au centre de gravité,

$$3 \qquad \sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\xi_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\eta_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\zeta_k = 0.$$

Il est facile d'éliminer trois des variables au moyen de ces équations et de réduire le système différentiel (2) à $3n$ équations du second ordre. Les seconds membres perdent alors la propriété d'être les dérivées partielles de la fonction U; mais on peut éviter cet inconvénient par une substitution linéaire et en faisant usage des formules connues de Lagrange.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS A L'ORDRE $6n$, PAR LA MÉTHODE DE JACOBI.

4. Soient, par un changement de variables,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
\xi = \alpha x + \beta x_1 + \ldots + \lambda x_{n-1},\\
\eta = \alpha y + \beta y_1 + \ldots + \lambda y_{n-1},\\
\zeta = \alpha z + \beta z_1 + \ldots + \lambda z_{n-1};\\
\xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1 + \ldots + \lambda_1 x_{n-1},\\
\eta_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1 + \ldots + \lambda_1 y_{n-1},\\
\zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1 + \ldots + \lambda_1 z_{n-1};\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
\xi_n = \alpha_n x + \beta_n x_1 + \ldots + \lambda_n x_{n-1},\\
\eta_n = \alpha_n y + \beta_n y_1 + \ldots + \lambda_n y_{n-1},\\
\zeta_n = \alpha_n z + \beta_n z_1 + \ldots + \lambda_n z_{n-1},
\end{array}\right.$$

où $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \ldots, \alpha_n, \beta_n, \ldots, \lambda_n$ désignent $n(n+1)$ coefficients constants et $x, x_1, x_{n-1}, y, y_1, \ldots, y_{n-1}, z, z_1, \ldots, z_{n-1}$, $3n$ nouvelles variables, qui remplaceront les précédentes, pourvu que les coefficients de la substitution soient assujettis aux n équations linéaires

$$(5)\qquad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \beta_k = 0, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \lambda_k = 0,$$

qui permettent de rendre identiques les équations (3), au moyen des valeurs (4).

5. Nous ajouterons aux conditions (5) les $\frac{n(n-1)}{2}$ nouvelles, en nombre égal aux combinaisons deux à deux des n lettres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, savoir

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \alpha_k \beta_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \alpha_k \gamma_k = 0, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \beta_k \lambda_k = 0.$$

Ce qui donne identiquement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \left[\left(\frac{d\xi_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_k}{dt}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \left[\left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2\right], \end{aligned}\right.$$

en faisant

$$(8)\quad m = \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \alpha_k^2, \quad m_1 = \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \beta_k^2, \ldots, \quad m_{n-1} = \sum_{k=0}^{k=n} \mu_k \lambda_k^2.$$

Par l'application de la formule de Lagrange

$$\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{dx_k}{dt}\right)} = \frac{\partial(T+U)}{\partial x_k},$$

il viendra ensuite, pour les équations du mouvement,

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{lll} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, & m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y}, & m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{dz}, \\ m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}, & m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y_1}, & m_1\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_{n-1}\dfrac{d^2x_{n-1}}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_{n-1}}, & m_{n-1}\dfrac{d^2y_{n-1}}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y_{n-1}}, & m_{n-1}\dfrac{d^2z_{n-1}}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_{n-1}}: \end{array}\right.$$

système semblable à (2), qui comprend trois équations de moins, et où la valeur (1) de U est transformée par les substitutions (4). C'est la transformation que Jacobi a fait connaître dans son Mémoire sur l'*Élimination des nœuds dans le problème des trois corps*.

CHAPITRE III.

D'UNE SIMPLIFICATION APPORTÉE AUX FORMULES PRÉCÉDENTES.

6. Le nombre des coefficients indéterminés qui entrent dans (4) est $n(n+1)$ et celui des conditions (5) et (6) est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$. Si l'on observe qu'on peut multiplier par n facteurs quelconques les variables $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$, et respectivement aussi $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$; $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$, ce qui revient à multiplier par les facteurs inverses tous les coefficients correspondants $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \lambda_i$ des substitutions, il ne restera plus que $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions arbitraires. Nous en disposerons en écrivant les substitutions (4) sous forme triangulaire, et en doublant la première ligne de n termes.

Nous avons ainsi été conduit à un théorème intéressant, qui nous paraît ajouter un perfectionnement à la méthode de Jacobi. Les coefficients précédents prennent alors une signification géométrique qui fait disparaître toute indétermination des formules considérées.

7. Désignons, pour cela, par G_1 le centre de gravité des deux premiers corps A, A_1, puis par G_2 le centre des trois premiers $A, A_1, A_2, \ldots$ et enfin par G_n le centre de gravité des $n+1$ corps $A, A_1, \ldots, A_n$. Soient, de plus, x, y, z; $x_1, y_1, z_1, \ldots$; $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$ les projections sur les axes coordonnés des longueurs AA_1, $G_1A_2, \ldots$; $G_{n-1}A_n$, et faisons

$$(10)\quad \begin{cases} \sigma = \mu, \\ \sigma_1 = \mu + \mu_1, \\ \sigma_2 = \mu + \mu_1 + \mu_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_n = \mu + \mu_1 + \ldots + \mu_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \mu_k. \end{cases}$$

8. On trouvera pour valeurs des coordonnées $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$, prises par rapport au centre de gravité G_n, les expressions linéaires

suivantes :

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi &= -\frac{\mu_1}{\sigma_1}x - \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 - \frac{\mu_3}{\sigma_3}x_2 - \cdots - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
\xi_1 &= \frac{\sigma}{\sigma_1}x - \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 - \frac{\mu_3}{\sigma_3}x_2 - \cdots - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
\xi_2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2}x_1 - \frac{\mu_3}{\sigma_3}x_2 - \cdots - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
\xi_3 &= \frac{\sigma_2}{\sigma_3}x_2 - \cdots - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_{n-1} &= \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}x_{n-2} - \frac{\mu_n}{\sigma_n}x_{n-1},\\
\xi_n &= \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}x_{n-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

On formera, de même, deux systèmes semblables par rapport aux deux autres axes coordonnés.

Appelons maintenant r, $r_1, \ldots, r_{n-1}$ les distances précédentes AA_1, $G_1A_2, \ldots, G_{n-1}A_n$; $\delta_{k,k'}$ la distance des deux points μ_k, $\mu_{k'}$, et Δ_k celle de μ_k à G_n. Faisons, de plus,

$$
(12)\qquad m = \sigma\frac{\mu_1}{\sigma_1},\quad m_1 = \sigma_1\frac{\mu_2}{\sigma_2}, \ldots,\quad m_{n-1} = \sigma_{n-1}\frac{\mu_n}{\sigma_n}.
$$

On vérifiera aisément les identités géométriques

$$
\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{k'=0}^{k'=n}\mu_k\mu_{k'}\delta_{k,k'}^2 = \sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\Delta_k^2 = \sum_{k=0}^{k=n-1}mr_k^2;
$$

par suite aussi l'équation analogue (7). Ainsi les substitutions (11), comme les précédentes (4), feront prendre aux équations du mouvement la forme (9), après le changement préalable de l'expression (1) de U.

CHAPITRE IV.

FONCTION PERTURBATRICE. — APPLICATION AU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

9. Dans la théorie des planètes on devra faire $\mu = \sigma$ égale à la masse du Soleil, et μ_1 égale à celle de la planète dont on veut étudier le mou-

vement; $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$ seront les autres masses dans l'ordre de leur influence perturbatrice à l'égard de la première planète μ_1. De cette manière les quantités auxiliaires $m, m_1, \ldots, m_{n-1}$ différeront très-peu des masses $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

Les équations du mouvement de la planète considérée seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Dans l'hypothèse de l'attraction newtonienne, U contiendra le premier terme important

$$\mu_1\mu_1\rho_1 = \frac{\mu\mu_1}{\delta_{0,1}} = \frac{\mu\mu_1}{r},$$

qui donne le mouvement elliptique de la planète.

10. La fonction perturbatrice U′ sera, après avoir retranché de U ce premier terme, et en continuant de faire usage des formules (11),

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
U' = {} & \frac{\mu\mu_2}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}x + x_1\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}y + y_1\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}z + z_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{\mu\mu_3}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}x + \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 + x_2\right) + \ldots\right]^{\frac{1}{2}}} + \ldots \\
& + \frac{\mu\mu_n}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}x + \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 + \ldots + x_{n-1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}y + \frac{\mu_2}{\sigma_2}y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}z + \frac{\mu_2}{\sigma_2}z_1 + \ldots + z_{n-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{\mu_1\mu_2}{\left[\left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}x + x_1\right)^2 + \left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}y + y_1\right)^2 + \left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}z + z_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} + \ldots \\
& + \frac{\mu_1\mu_k}{\left[\left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}x + \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 + \ldots + x_{n-1}\right)^2 + \left(\ldots\right)^2 + \left(\ldots\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} + \ldots \\
& + \frac{\mu_1\mu_n}{\left[\left(-\frac{\sigma}{\sigma_1}x + \frac{\mu_2}{\sigma_2}x_1 + \ldots + x_{n-1}\right)^2 + \ldots\right]^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}\right.$$

11. Le développement en série de U′ qui comprend $2(n-1)$ termes n'offre pas beaucoup plus de difficultés que dans la méthode ordinaire. Les inégalités dues aux perturbations conserveront la même forme; mais les arguments devront être corrigés, et ne seront plus des multiples des élongations réelles des astres. Les positions de ces derniers devront être préalablement modifiées par de petites équations analogues aux parallaxes, à cause de l'éloignement du centre primitif A (ici, du Soleil) des divers points $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$.

12. Pour appliquer cette méthode à la Lune, on devra faire $n = 2$ et μ, μ_1, μ_2 respectivement égales aux masses de la Terre, de la Lune et du Soleil. Les formules précédentes deviendront dans ce cas

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} U' = & \frac{\mu\mu_2}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1}\right)^2 r^2 + r_1^2 + \frac{2\mu_1}{\mu+\mu_1} r r_1 \cos\omega\right]^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{\mu_1\mu_2}{\left[\left(\frac{\mu}{\mu+\mu_1}\right)^2 r^2 + r_1^2 - \frac{2\mu}{\mu+\mu_1} r r_1 \cos\omega\right]^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}\right.$$

en désignant par r, r_1 les distances

$$AA_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad G_1A_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

définies comme ci-dessus, et par ω l'angle des directions correspondantes. Si l'on fait, dans les premières des équations (9), $m = \frac{\mu\mu_1}{\mu+\mu_1}$, les équations du mouvement de la Lune troublée par le Soleil seront

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = (\mu+\mu_1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + & \frac{\mu_2}{\left(\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\left[r_1^2 + \frac{2\mu_1}{\mu+\mu_1} r_1 r\cos\omega + \left(\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1} r\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{\mu_2}{\left(\frac{\mu}{\mu+\mu_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\left[r_1^2 - \frac{2\mu}{\mu+\mu_1} r_1 r\cos\omega + \left(\frac{\mu r}{\mu+\mu_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right.$$

et deux autres équations semblables qu'on obtient par le changement de x en y et en z.

Le calcul des perturbations de la Lune dépendra donc du développement connu de l'expression

$$(r_1^2 + \alpha^2 r^2 + 2\alpha r r_1 \cos\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

où il faudrait ensuite tenir compte des valeurs approchées de r, r_1 et des cosinus des multiples de ω en fonction du temps, et remplacer successivement α par $\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1}$ et par $-\frac{\mu}{\mu+\mu_1}$.

Dans le cas où le problème devrait être traité en toute rigueur, comme nous le supposerons dans la suite de ce Mémoire, les six équations du mouvement se réduiraient à

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x},\quad m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y},\quad m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z};\\ m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1},\quad m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y_1},\quad m_1\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_1}, \end{array}\right.$$

et l'on aurait

$$(17)\qquad U = \frac{\mu\mu_1}{r} + U',$$

$$(18)\qquad m = \mu\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1},\quad m_1 = (\mu+\mu_1)\frac{\mu_2}{\mu+\mu_1+\mu_2},$$

en donnant à U' la valeur (14). Il importe de remarquer que la fonction U dépendra ici uniquement des trois variables p, q, l, savoir :

$$(19)\qquad p = \tfrac{1}{2}r^2,\quad q = \tfrac{1}{2}r_1^2,\quad l = rr_1\cos\omega,$$

et nous aurons occasion d'utiliser plus tard cette propriété.

CHAPITRE V.

FORME DES INTÉGRALES CONNUES.

13. On déduit facilement des équations (9),

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(\frac{d^2x_k}{dt^2}dx_k+\frac{d^2y_k}{dt^2}dy_k+\frac{d^2z_k}{dt^2}dz_k\right)=dU,$$

et, en intégrant,

$$(20)\qquad \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left[\left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_k}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2\right]=U-H,$$

qui est l'*équation des forces vives*, où H désigne une constante arbitraire.

14. Les équations (2) donnent aussi

$$\sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\left(\eta_k\frac{d^2\zeta_k}{dt^2}-\zeta_k\frac{d^2\eta_k}{dt^2}\right)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\left(\zeta_k\frac{d^2\xi_k}{dt^2}-\xi_k\frac{d^2\zeta_k}{dt^2}\right)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}\mu_k\left(\xi_k\frac{d^2\eta_k}{dt^2}-\eta_k\frac{d^2\xi_k}{dt^2}\right)=0,$$

et, par la substitution des expressions (4) et en ayant égard aux relations (5), (6) et (8), il viendra

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(y_k\frac{d^2z_k}{dt^2}-z_k\frac{d^2y_k}{dt^2}\right)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(z_k\frac{d^2x_k}{dt^2}-x_k\frac{d^2z_k}{dt^2}\right)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(x_k\frac{d^2y_k}{dt^2}-y_k\frac{d^2x_k}{dt^2}\right)=0.$$

d'où résultent, par de nouvelles intégrations, les trois intégrales dites des *aires* :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(y_k\frac{dz_k}{dt} - z_k\frac{dy_k}{dt}\right) = \mathrm{A},\\ &\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(z_k\frac{dx_k}{dt} - x_k\frac{dz_k}{dt}\right) = \mathrm{B},\\ &\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left(x_k\frac{dy_k}{dt} - y_k\frac{dx_k}{dt}\right) = \mathrm{C}.\end{aligned}\right.$$

Les équations (20) et (21) sont, sous une forme un peu différente, quatre intégrales bien connues.

CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION DE DEUX NOUVELLES INTÉGRALES.

15. Par un changement d'axes coordonnés, on peut rendre nulles les deux premières constantes A et B des équations (21). Il suffit, pour cela, de choisir pour l'un des plans coordonnés le *plan invariable* du système, ou celui qui correspond au *maximum des aires* dans le mouvement considéré.

Projetons sur ce plan les droites menées de l'origine aux points x, y, z; $x_1, y_1, z_1, \ldots$; $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$, et désignons par $s, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, u, $u+\omega_1$, $u+\omega_2, \ldots, u+\omega_{n-1}$ les longueurs des projections obtenues et les angles qu'elles font respectivement avec l'axe des x, de sorte que $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ sont les angles que font avec s les autres projections $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

16. Ajoutons, membre à membre, les deux premières équations (21) ainsi modifiées, après avoir multiplié la première par $-\sqrt{-1}$, et introduit la base e des logarithmes népériens. Il viendra

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\left\{z_k\frac{d}{dt}\left[s_k e^{(u+\omega_k)\sqrt{-1}}\right] - s_k\frac{dz_k}{dt}e^{(u+\omega_k)\sqrt{-1}}\right\} = 0$$

ou, en divisant par $e^{u\sqrt{-1}}$, et supposant en outre $\omega_0 = 0$,

$$(22)\quad \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k e^{\omega_k \sqrt{-1}} \left[z_k \frac{ds_k}{dt} - s_k \frac{dz_k}{t} + s_k z_k \left(\frac{du}{dt} + \frac{d\omega_k}{dt} \right) \sqrt{-1} \right] = 0.$$

D'un autre côté, la troisième intégrale des aires (21) devient, par ce changement de variables,

$$(23)\quad \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2 \left(\frac{du}{dt} + \frac{d\omega_k}{dt} \right) = C,$$

et l'on en tire

$$(24)\quad \frac{du}{dt} = \frac{C - \sum_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \frac{d\omega_k}{dt}}{\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2}.$$

17. Si l'on substitue cette valeur de $\frac{du}{dt}$ dans (22) et qu'on décompose ensuite en deux l'équation résultante, en égalant à zéro les parties réelles et imaginaires, on trouvera

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=n-1} m_k \left[\left(z_k \frac{ds_k}{dt} - s_k \frac{dz_k}{dt} \right) \cos \omega_k - z_k s_k \frac{d\omega_k}{dt} \sin \omega_k \right] \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k z_k \sin \omega_k \right) \frac{C - \sum_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \frac{d\omega_k}{dt}}{\sum_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2} = 0, \\ &\sum_{k=1}^{k=n-1} m_k \left(s_k z_k \frac{d\omega_k}{dt} \cos \omega_k \right) + \left(z_k \frac{ds_k}{dt} - s_k \frac{dz_k}{dt} \right) \sin \omega_k \\ &\quad + \left(\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k z_k \cos \omega_k \right) \frac{C - \sum_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \frac{d\omega_k}{dt}}{\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

18. L'équation des forces vives (20) deviendra de même

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{2} m_k \left[\left(\frac{ds_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2 + s_k^2 \left(\frac{du}{dt} + \frac{d\omega_k}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{U} - \mathrm{H},$$

ou, après la substitution de la valeur (24) de $\frac{du}{dt}$, et, toutes réductions faites,

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{2} m_k \left[\left(\frac{ds_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2 + s_k^2 \left(\frac{d\omega_k}{dt}\right)^2\right] \\ &\qquad + \frac{\mathrm{C}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \frac{d\omega_k}{dt}\right)^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2} = \mathrm{U} - \mathrm{H}. \end{aligned} \right.$$

Il importe de remarquer que la variable u n'entre pas dans les trois dernières équations, non plus que dans la fonction des forces U.

19. Nous transformerons les équations du mouvement, dans le système des nouvelles variables, au moyen des formules de Lagrange. En posant

$$\mathrm{T} = \left\{ m\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \sum_{k=1}^{k=n-1} m_k \left[\left(\frac{ds_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2 + s_k^2 \left(\frac{d\omega_k}{dt}\right)^2\right] \right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{C}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \frac{d\omega_k}{dt}\right)^2}{\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2} \right\},$$

et, en considérant maintenant C comme une constante particulière donnée, nous formerons ainsi les $3n - 1$ équations différentielles du

second ordre

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z},\quad m_1\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_1},\ldots,\quad m_{n-1}\frac{d^2z_{n-1}}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_{n-1}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)}=\frac{\partial(T+U)}{\partial s},\ldots,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\frac{ds_{n-1}}{dt}}=\frac{\partial(T+U)}{ds_{n-1}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)}=\frac{\partial(T+U)}{\partial\omega_1},\ldots,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\omega_{n-1}}{dt}\right)}=\frac{\partial(T+U)}{\partial\omega_{n-1}}.$$

20. Pour abaisser ces équations au premier ordre, nous introduirons $3n-1$ variables auxiliaires, savoir

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned} &z'=m\frac{dz}{dt},\quad z'_1=m_1\frac{dz_1}{dt},\ldots,\quad z'_{n-1}=m_{n-1}\frac{dz_{n-1}}{dt},\\ &s'=m\frac{ds}{dt},\quad s'_1=m_1\frac{ds_1}{dt},\ldots,\quad s'_{n-1}=m_{n-1}\frac{ds_{n-1}}{dt},\\ &\omega'_1=\frac{d\omega_1}{dt},\ldots,\quad \omega'_{n-1}=\frac{d\omega_{n-1}}{dt};\end{aligned}\right.$$

ce qui donne

$$(28)\quad\left\{\begin{aligned} T=&\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{2m_k}(s'^2_k+z'^2_k)\\ &+\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{2}m_k s_k^2\omega'^2_k+\frac{C^2-\left(\sum_{k=1}^{k=n-1}m_k s_k^2\omega'_k\right)^2}{2\sum_{k=0}^{k=n-1}m_k s_k^2},\end{aligned}\right.$$

et pour les équations du mouvement

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{dz'}{dt}=\frac{\partial U}{\partial z},\quad \frac{dz'_1}{dt}=\frac{\partial U}{\partial z_1},\ldots,\quad \frac{dz'_{n-1}}{dt}=\frac{\partial U}{\partial z_{n-1}};\\ &\frac{ds'}{dt}=\frac{\partial(T+U)}{\partial s},\quad \frac{ds'_1}{dt}=\frac{\partial(T+U)}{\partial s_1},\ldots,\quad \frac{ds'_{n-1}}{dt}=\frac{\partial(T+U)}{\partial s_{n-1}};\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\omega'_1}=\frac{\partial(T+U)}{d\omega_1},\ldots,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\omega'_{n-1}}=\frac{\partial(T+U)}{\partial\omega_{n-1}}.\end{aligned}\right.$$

en exprimant U en fonction des mêmes variables $s, s_1, \ldots; z, z_1, \ldots, z_{n-1}, \ldots; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, et prenant pour T l'expression (28). Ces dernières, jointes à (27), forment un système complet, d'ordre $6n-2$, entre le temps t et les $6n-2$ variables

$$z, z_1, \ldots, z_{n-1}; \quad s, s_1, \ldots, s_{n-1}; \quad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1};$$
$$z', z'_1, \ldots, z'_{n-1}; \quad s', s'_1, \ldots, s'_{n-1}; \quad \omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_{n-1}.$$

Mais on peut en éliminer immédiatement t, et réduire ainsi le système à $6n-3$ équations du premier ordre entre les $6n-2$ dernières variables. Les relations (25) et (26) fourniront trois intégrales et abaisseront, par suite, l'ordre à $6n-6$, ou à celui qui correspond au mouvement de $n-1$ points, mais dans le cas où la conservation des forces vives n'a plus lieu.

21. Après avoir intégré complétement le système formé par (27) et (29), réduit par l'élimination du temps et à l'aide des intégrales connues (25) et (26), les variables s'exprimeront toutes au moyen d'une d'entre elles, ω_1 par exemple, et la solution s'achèvera par deux quadratures, savoir :

$$t - t_0 = \int \frac{d\omega_1}{\omega'_1}, \tag{30}$$

$$u - u_0 = \int \frac{C - \sum_{k=1}^{k=n-1} m_k s_k^2 \omega'_k}{\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k s_k^2} \frac{d\omega_1}{\omega'_1}, \tag{31}$$

en désignant par t_0 et u_0 deux nouvelles constantes arbitraires.

22. Jacobi a signalé comme immédiate au n° **22** du Mémoire latin, sur la *Théorie du nouveau multiplicateur* (*Journal de Crelle*, t. XXIX, p. 259), la détermination du temps par une dernière quadrature, et il s'exprime ainsi : « *Ultimam integrationem, qua t per coordinatas exprimatur, quadraturis absolvi, res erat nota et sponte patens.* »

Nous observerons, toutefois, que l'intégrale (30) n'est pas plus ici

la dernière que (31), et il n'y a pas lieu, il semble, au point de vue de l'intégration rigoureuse, d'établir entre les deux intégrales un ordre de prééminence. En les considérant simultanément, comme nous venons de le faire, on effectue sûrement deux intégrations, dans le sens même du géomètre prussien. Or, dans son Mémoire *Sur l'élimination des nœuds*, Jacobi s'était borné à dire : « *Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra dire que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde.* »

SECTION DEUXIÈME.

FORME CANONIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET DES INTÉGRALES.

CHAPITRE PREMIER.

AUTRE MÉTHODE D'INTÉGRATION.

23. Après avoir mis les équations du mouvement de $n+1$ points sous la forme (9) (n° 5), savoir :

$$(1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\ldots,\quad m_{n-1}\frac{d^2z_{n-1}}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_{n-1}},$$

nous poserons

$$(2)\qquad x'=m\frac{dx}{dt},\ y'=m\frac{dy}{dt},\ldots,\ y'_{n-1}=m_{n-1}\frac{dy_{n-1}}{dt},\ z'_{n-1}=m_{n-1}\frac{dz_{n-1}}{dt},$$

ce qui permet d'écrire ainsi les quatre intégrales connues

$$(3)\qquad U-\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{2m_i}(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)=H,$$

$$(4)\qquad \sum_{i=0}^{i=n-1}(y_iz'_i-z_iy'_i)=A,$$

$$(5)\qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} (z_i x'_i - x_i z'_i) = \mathrm{B},$$

$$(6)\qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_i y'_i - y_i x'_i) = \mathrm{C},$$

et de donner aux équations (1) la forme *canonique*

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}, & \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}, & \dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}, \\
\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}, & \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}, & \dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z'}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{dx'_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_{n-1}}, & \dfrac{dy'_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_{n-1}}, & \dfrac{dz'_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_{n-1}}, \\
\dfrac{dx_{n-1}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'_{n-1}}, & \dfrac{dy_{n-1}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'_{n-1}}, & \dfrac{dz_{n-1}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z'_{n-1}},
\end{array}\right.$$

où H désigne le premier membre de l'équation (3).

24. Les équations (7) sont précisément celles qui serviraient à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (3), où, sans égard aux relations (2), on supposerait, à nouveau,

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
x' = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}, & y' = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial y}, & z' = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
x'_{n-1} = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_{n-1}}, & y'_{n-1} = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial y_{n-1}}, & z'_{n-1} = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial z_{n-1}},
\end{array}\right.$$

en représentant par S une fonction de $3n$ variables $x, y, \ldots, z_{n-1}$ et de $3n-1$ constantes arbitraires, non compris la constante H et celle qui s'ajoute à S. S est donc une solution complète de l'équation (3) à $3n$ variables indépendantes, qui satisfera identiquement à cette équation.

25. D'après une théorie connue, les constantes qui entreront dans S sont celles des intégrales mêmes de (7), mais choisies de manière que deux quelconques d'entre elles, f et g par exemple, donnent l'iden-

tité *nécessaire et suffisante* [*Nova methodus* (*Journal de Crelle*, tome LX)].

$$(9)\quad \left\{ [f, g] = \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x'_i} - \frac{\partial f}{\partial x'_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y'_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial g}{\partial z'_i} - \frac{\partial f}{\partial z'_i}\frac{\partial g}{\partial z_i} \right) = 0, \right.$$

et si l'on connaissait $3n - 1$ intégrales de (7), distinctes de H, satisfaisant deux à deux à cette condition, on en déduirait facilement ensuite les valeurs des dérivées x', y',..., z'_{n-1} et, par suite, la fonction S par une quadrature. En égalant à de nouvelles constantes arbitraires les dérivées partielles de S par rapport aux $3n - 1$ constantes qui y entrent, et $\frac{\partial S}{\partial H}$ à $t_0 - t$ (t_0 désignant la constante arbitraire du temps), on obtiendra les $3n$ intégrales finies du problème, avec $6n$ constantes arbitraires, parmi lesquelles H.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DE TROIS INTÉGRALES CANONIQUES.

26. La condition essentielle $[f, g] = 0$ est toujours remplie lorsqu'on prend pour l'une des intégrales H ou (3). Si l'on différentie, en effet, l'autre intégrale, par rapport au temps, et que l'on remplace les dérivées des variables par leurs valeurs (7), il vient identiquement $[H, g] = 0$, par suite de la disparition des constantes. Il est donc inutile d'appliquer le caractère discriminant (9) aux combinaisons binaires où entre H, que nous prendrons pour première intégrale canonique, et nous lui adjoindrons pour seconde intégrale canonique l'une quelconque des intégrales des aires, par exemple l'équation (6) ou C.

27. Avant de procéder à la recherche d'une nouvelle intégrale canonique, nous devons faire observer que la constante H, de même que C ou toute autre constante canonique, peut figurer à titre de

de simple constante particulière ou être remplacée, à volonté, par sa valeur en fonction des variables dans le premier membre de toute intégrale de (7) qu'on voudra considérer.

En appelant F et G ce que deviennent les fonctions f et g, après qu'on aura remplacé les constantes canoniques $\alpha, \beta, \ldots, C, H$ par leurs valeurs données en fonction des seules variables $x, y, \ldots, z'_{n-1}$, on aura, en effet, identiquement

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} [F, G] = [f, g] &+ [\alpha, \beta]\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right) + \ldots \\ &+ [\alpha, H]\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial H} - \frac{\partial f}{\partial H}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right) + \ldots \\ &+ [\alpha, C]\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial C} - \frac{\partial f}{\partial C}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right) + \ldots \end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$(11)\qquad [F, G] = [f, g],$$

à cause des identités

$$[\alpha, \beta] = [\alpha, H] = [\alpha, C] = \ldots = 0,$$

auxquelles donnent lieu, deux à deux, les intégrales canoniques $\alpha, \ldots, C$ et H.

28. Les intégrales (4) et (5), dont nous n'avons pas fait usage, ne remplissent plus la condition (9), car on a

$$(12)\qquad [A, B] = C,$$

de même que

$$(13)\qquad [B, C] = A \quad \text{et} \quad [C, A] = B.$$

On ne peut donc prendre ni A ni B pour nouvelles intégrales cano-

niques à adjoindre aux précédentes H et C; mais si l'on fait

$$(14)\quad K = A^2 + B^2 = \left[\sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i z'_i - z_i y'_i)\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{i=n-1} (z_i x'_i - x_i z'_i)\right]^2,$$

en appelant K une nouvelle constante arbitraire, cette intégrale de (7) sera distincte à la fois de C et de H.

Nous aurons d'abord évidemment (n° **26**)

$$[H, K] = 0,$$

et, d'autre part, par l'application de la formule (10) du numéro précédent, il viendra

$$[K, C] = [A, C]\left(\frac{\partial K}{\partial A}\frac{\partial C}{\partial C} - \frac{\partial K}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial A}\right) + [B, C]\left(\frac{\partial K}{\partial B}\frac{\partial C}{\partial C} - \frac{\partial K}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial B}\right) = -2AB + 2BA = 0.$$

Ainsi les deux conditions

$$(15)\qquad [H, K] = 0 \quad \text{et} \quad [K, C] = 0$$

seront identiquement remplies et K sera la troisième intégrale canonique qu'il est permis d'adjoindre aux précédentes H et C.

29. Si l'on rapproche l'identité (9) des équations différentielles qu'il faudrait établir pour intégrer les équations

$$f = \alpha, \quad g = \beta,$$

où α et β désignent deux constantes arbitraires et f et g deux fonctions intégrales du système (7), on s'assure aisément que les intégrales *canoniques*, qui définissent la fonction S, sont toutes, de même que H, satisfaites par les mêmes dérivées partielles (8). Ainsi S est une solution commune à $3n$ équations distinctes, aux dérivées partielles du premier ordre, correspondant aux intégrales canoniques H, C, K,. .., et à toutes celles qu'on en déduit par des combinaisons quelconques. La proposition réciproque, généralement vraie lorsqu'on considère des solutions complètes, ne l'est plus pour des solutions singulières de

l'équation (3), qui peuvent satisfaire en même temps à des intégrales non canoniques particulières de (7), où les constantes seraient nulles; mais nous ne nous occuperons d'abord dans cette Section que du cas ordinaire où la solution S est complète.

CHAPITRE III.

NOUVELLE RÉDUCTION DE SIX UNITÉS DANS L'ORDRE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CONSÉQUENCES QUI EN RÉSULTENT.

30. Si, conformément à la remarque précédente, on élimine entre les trois intégrales canoniques, H, C et K, deux quelconques des $3n$ variables x', $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$, y', $y'_1, \ldots, z'_{n-1}$, par exemple y' et z', on pourra supposer ensuite que la première x' est déterminée en fonction des $6n-5$ autres, savoir :

$$x, x_1, y_1, z_1, \ldots; \quad x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, \ldots; \quad x'_1, y'_1, z'_1, \ldots; \quad x'_{n-1}, y'_{n-1}, z'_{n-1},$$

et traiter y et z, de même que C, H et K, comme des constantes particulières dans l'équation aux dérivées partielles, où n'entreront plus alors les dérivées de S par rapport à y et à z.

Par l'application de la méthode connue, l'intégration de cette dernière équation, qui dépend toujours, comme l'équation (3), de celle du système (7) aux dérivées ordinaires, se ramène, à cause de la disparition des dérivées y' et z', à l'intégration du nouveau système canonique de l'ordre $6n-6$, savoir :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{dx'_1}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial x_1}, & \dfrac{dy'_1}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial y_1}, & \dfrac{dz'_1}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial z_1}, \\[2ex]
\dfrac{dx_1}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial x'_1}, & \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial y'_1}, & \dfrac{dz_1}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial z'_1}, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\[2ex]
\dfrac{dx'_{n-1}}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial x_{n-1}}, & \dfrac{dx}{dy'_{n-1}} = \dfrac{\partial x'}{\partial y_{n-1}}, & \dfrac{dz'_{n-1}}{dx} = \dfrac{\partial x'}{\partial z_{n-1}}, \\[2ex]
\dfrac{dx_{n-1}}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial x'_{n-1}}, & \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial y'_{n-1}}, & \dfrac{dz_{n-1}}{dx} = -\dfrac{\partial x'}{\partial z'_{n-1}}.
\end{array}\right.$$

Ces dernières équations sont d'un ordre inférieur de six unités à celui des équations (7). Il faudra néanmoins s'assurer, conformément à la méthode exposée au Chapitre V de notre Mémoire sur l'*Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (p. 251), que les intégrales de (16) sont communes à (7) ou conviennent au problème, ce qui peut exiger quelques nouvelles intégrations auxiliaires plus ou moins pénibles. Ainsi, si l'on obtenait une première intégrale (α) de (16), qui ne fût pas en même temps une intégrale de (7), on devrait remplacer α par une fonction inconnue de y et de z. En différentiant, par rapport à toutes les variables, et en tenant compte des équations (7) et des valeurs de H, C, K, il faudra que les variables y et z s'éliminent naturellement. On devra donc obtenir une équation linéaire et du premier ordre entre $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial z}$, y et z, dont l'intégration dépendra, au plus, du second ordre des différences ordinaires. Toutes les intégrales de (16) se déduisant immédiatement des solutions S, qui, en nombre infini, sont communes à H, C et K, il est naturel d'admettre réciproquement qu'en général la constante α de toute intégrale de (16) correspondra, après la détermination d'une fonction particulière de y et de z, à la constante arbitraire d'une autre intégrale de (7). Si néanmoins, et exceptionnellement, les conditions dont nous venons de parler ne pouvaient pas être remplies, la méthode cessant d'être applicable, il faudrait rejeter comme superflue l'intégrale de (16) qui n'aurait plus sa correspondante dans (7) ou dans le problème actuel.

31. Rappelons le parti avantageux que l'on aurait à tirer, en outre, de l'intégrale α, commune à (16) et à (7). En la combinant avec les intégrales *non canoniques* A *et* B, et en égalant à une constante arbitraire l'expression

$$[\alpha, \mathrm{A}] \quad \text{ou} \quad [\alpha, \mathrm{B}],$$

on aura, en général, une autre intégrale de (7). L'intégrale α fournirait ainsi de nouvelles intégrales susceptibles, de même, de donner naissance à d'autres. Dans le cas de $n = 2$, ou du problème des trois corps, une ou deux intégrales communes à (16) et à (7), jointes aux quatre connues, formeraient un nombre qui paraît suffisant, à cause de la possibilité de les combiner entre elles, comme il vient d'être dit.

SECTION TROISIÈME.

RÉDUCTION DU PROBLÈME DES TROIS CORPS AU QUATRIÈME ORDRE ET A LA FORME CANONIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

32. La théorie exposée dans la Section précédente fait dépendre, comme on a vu, la solution du problème des trois corps, abstraction faite de quelques difficultés secondaires, de l'intégration de six équations différentielles du premier ordre, analogues à celles par lesquelles on exprimerait le mouvement d'un point matériel libre, lorsque la conservation des forces vives n'a pas lieu.

Mais on n'a eu besoin de faire intervenir, dans la nouvelle solution, que trois des intégrales connues, savoir : H, C et K, et l'on a laissé arbitraires les plans coordonnés, et, au fond, aussi la nature des variables qui déterminent la position des corps. Il y a donc lieu d'espérer qu'en utilisant toutes les intégrales, et choisissant convenablement les plans coordonnés, ainsi que les variables du problème, on approchera davantage encore de la solution. Nous croyons y être parvenu, en exprimant les intégrales au moyen des dérivées partielles d'une même fonction, qui ne renfermerait plus, comme précédemment, six, mais seulement trois constantes arbitraires, et serait une *solution singulière* de l'équation fondamentale, à six variables indépendantes, dont dépend le problème.

33. Nous mettrons cette dernière sous la forme (3) du n° **23**

$$(1)\qquad U - \frac{1}{2m}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{1}{2\mu}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = H,$$

où nous ferons, comme plus haut, et en changeant les variables x, y

et z, et ξ, η et ζ,

$$2 \qquad x' = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad y' = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad z' = \frac{\partial S}{\partial z}; \quad \xi' = \frac{\partial S}{\partial \xi}, \quad \eta' = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad \zeta' = \frac{\partial S}{\partial \zeta}.$$

Les équations du problème étant écrites sous la forme canonique

$$3 \qquad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, & \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial y}, \ldots, & \dfrac{d\zeta'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta}, \\ \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\partial U}{\partial x'}, & \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{\partial U}{\partial y'}, \ldots & \dfrac{d\zeta}{dt} = -\dfrac{\partial U}{\partial \zeta}. \end{cases}$$

les intégrales finies du problème seront, lorsqu'on suppose que S est une solution quelconque *complète* de (1),

$$4 \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial S}{\partial \delta} = \delta', \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \varepsilon', \quad \frac{\partial S}{\partial H} = t_0 - t.$$

en désignant par α, δ, γ, δ, ε, H les six constantes qui entrent dans S (non compris la constante additive), et par α', δ',..., ε' et t_0 six autres constantes arbitraires conjuguées.

34. Supposons maintenant nulles deux de ces dernières, par exemple δ' et ε', on

$$5 \qquad \frac{\partial S}{\partial \delta} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Nous tirerons de ces deux équations les valeurs de δ et ε des fonctions de x, y,..., ζ et des autres constantes α, δ, γ et H. La substitution de δ et ε dans la solution précédente S la transforme en S_1, et les équations (2) et (4) continueront à être des intégrales du problème des trois corps, en y changeant S en S_1, mais elles sont compatibles avec (5), ce qui restreint un peu la généralité de l'intégration.

On aura, en effet,

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = x',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \alpha',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

à cause des conditions (5), et après avoir effectué le changement de S en S_1. Ainsi les identités (2) seront encore satisfaites, et, d'un autre côté, les équations

$$(6)\qquad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial S_1}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial S_1}{\partial \gamma} = \gamma', \quad \frac{\partial S_1}{\partial \Pi} = t_0 - t,$$

pouvant être regardées comme des combinaisons particulières des intégrales précédentes (4) et (5), seront aussi des intégrales du problème des trois corps.

33. Il importe de remarquer que ces solutions singulières modifient beaucoup la théorie que nous avons rappelée et appliquée dans la Section précédente. Ainsi la solution S_1 à quatre constantes arbitraires, que nous venons de définir, satisfait identiquement aux six équations qu'on obtient, en en prenant les diverses dérivées partielles. On peut donc former, par suite, un système de six intégrales de (3), dont quatre, résolues par rapport aux constantes α, β, γ et δ, sont de la forme

$$(7)\qquad f_1 = \alpha, \quad f_2 = \beta, \quad f_3 = \gamma, \quad f_4 = \delta,$$

tandis que les deux dernières, où n'entrerait aucune constante arbitraire, seraient

$$(8)\qquad f_5 = 0, \quad f_6 = 0.$$

Si l'on applique le caractère discriminant $[f_k, f_{k'}] = 0$ aux six fonctions intégrales, sans constantes, désignées par $f_1, f_2, \ldots, f_6$, et prises deux à deux, on obtiendra encore quinze identités; mais il faut expressément, pour cela, tenir compte des deux relations (8). Réciproquement, ces conditions seraient suffisantes, en général, pour que l'ensemble des intégrales (7) et (8) définît la solution singulière S_1 correspondant aux intégrales finies (6) du système (3). Les équations (6), (7) et (8) forment dix intégrales, et il ne resterait plus que les deux dernières à trouver pour résoudre complétement le problème actuel.

Ces propositions s'étendent évidemment au cas où la solution singulière renfermerait moins de constantes arbitraires et correspondrait,

en même temps, à un plus petit nombre d'intégrales de (3). Elles s'établissent facilement, en suivant la marche que nous avons adoptée au Chapitre III de notre Mémoire *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*. (*Voir* aussi les n^{os} **53** et **54** du même Mémoire, page 259.)

CHAPITRE II.

NOUVELLE ÉTUDE DU PROBLÈME DES TROIS CORPS, EN RAPPORTANT LE MOUVEMENT AU PLAN INVARIABLE DU SYSTÈME.

36. Nous transformerons maintenant l'équation (1), au moyen des variables dont nous avons déjà fait usage dans la première Section, lesquelles sont liées aux précédentes x, y, z, ξ, η et ζ par les formules

$$(9)\quad x = s\cos u,\quad y = s\sin u;\quad \xi = \sigma\cos(u+\omega),\quad \eta = \sigma\sin(u+\omega),$$

et leurs inverses

$$(10)\quad s^2 = x^2 + y^2,\quad \sigma^2 = \xi^2 + \eta^2;\ \operatorname{tang} u = \frac{y}{x},\ \operatorname{tang}\omega = \frac{x\eta - y\xi}{x\xi + y\eta}.$$

Il est bien visible que la fonction U ne dépend que des cinq variables s, σ, z, ζ et ω.

Appelons s', σ', ω' et u' les dérivées partielles de S, solution de (1), par rapport à s, σ, ω et u. Ces nouvelles variables seront liées à x', y', ξ' et η' par les équations

$$s' = x'\frac{\partial x}{\partial s} + y'\frac{\partial y}{\partial s} + \xi'\frac{\partial \xi}{\partial s} + \eta'\frac{\partial \eta}{\partial s},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$u' = x'\frac{\partial x}{\partial u} + y'\frac{\partial y}{\partial u} + \xi'\frac{\partial \xi}{\partial u} + \eta'\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

et

$$x' = s'\frac{\partial s}{\partial x} + \sigma'\frac{\partial s}{\partial x} + \omega'\frac{\partial \omega}{\partial x} + u'\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\eta' = s'\frac{\partial s}{\partial \eta} + \sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + \omega'\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + u'\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

57. En appliquant ces formules aux équations (9) et (10), il viendra

$$(11)\quad \begin{cases} s' = \dfrac{xx'+yy'}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sigma' = \dfrac{\xi\xi'+\eta\eta'}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}; \\ \omega' = \xi\eta' - \eta\xi', \quad u' = xy' - yx' + \xi\eta' - \eta\xi' \end{cases}$$

et

$$(12)\quad \begin{cases} x' = s'\cos u + \dfrac{\omega'-u'}{s}\sin u, \quad y' = s'\sin u - \dfrac{\omega'-u'}{s}\cos u; \\ \xi' = \sigma'\cos(\omega+u) - \dfrac{\omega'}{\sigma}\sin(\omega+u), \quad \eta' = \sigma'\sin(\omega+u) + \dfrac{\omega'}{\sigma}\cos(\omega+u). \end{cases}$$

58. On aura, en outre,

$$(13)\quad \begin{cases} x'^2 + y'^2 = s'^2 + \left(\dfrac{\omega'-u'}{s}\right)^2, \\ \xi'^2 + \eta'^2 = \sigma'^2 + \dfrac{\omega'^2}{\sigma^2}, \\ x\eta' - y\xi' = s\left(\sigma'\sin\omega + \dfrac{\omega'}{\sigma}\cos\omega\right), \\ \xi y' - \eta x' = \sigma\left(s\sin\omega + \dfrac{\omega'-u'}{s}\cos\omega\right). \end{cases}$$

59. La substitution des valeurs (12) dans (1) transformera cette dernière en

$$(14)\quad U - \frac{1}{2m}\left[s'^2 + z'^2 + \left(\frac{\omega'-u'}{s}\right)^2\right] - \frac{1}{2\mu}\left(\sigma'^2 + \zeta'^2 + \frac{\omega'^2}{\sigma^2}\right) = H;$$

et, comme la variable u n'entre dans cette équation que par sa différentielle, il suffit pour la faire disparaître de poser

$$(15)\quad S = Cu + V,$$

ou encore

$$(16)\quad u' = C,$$

en désignant par C une constante arbitraire et par V une fonction inconnue qui ne dépend, de même que U, que des cinq variables s, σ, z, ζ et ω.

L'équation (14) devient, par suite,

$$(17)\quad U - \frac{1}{2m}\left[s'^2 + z'^2 + \left(\frac{\omega' - C}{s}\right)^2\right] - \frac{1}{2\mu}\left(\sigma'^2 + \zeta'^2 + \frac{\omega'^2}{\sigma^2}\right) = H,$$

en continuant à désigner par s', σ', z', ζ' et ω' les dérivées partielles de la fonction V.

40. La dernière des équations (11) montre que C est précisément l'une des constantes des aires, et si on la considère, de même que H, comme une constante particulière de (17), le problème des trois corps se ramènera à l'intégration du système canonique du huitième ordre

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{ds}{d\omega} = \dfrac{\partial\omega'}{\partial s}, & \dfrac{d\sigma}{d\omega} = \dfrac{\partial\omega'}{\partial\sigma}, & \dfrac{dz}{d\omega} = \dfrac{\partial\omega'}{\partial z}, & \dfrac{d\zeta}{d\omega} = \dfrac{\partial\omega'}{\partial\zeta}, \\ \dfrac{ds}{d\omega} = -\dfrac{\partial\omega'}{\partial s'}, & \dfrac{d\sigma}{d\omega} = -\dfrac{\partial\omega'}{\partial\sigma'}, & \dfrac{dz}{d\omega} = -\dfrac{\partial\omega'}{\partial z'}, & \dfrac{d\zeta}{d\omega} = -\dfrac{\partial\omega'}{\partial\zeta'}, \end{cases}$$

où ω' est donné en fonction des neuf variables s, σ, z, ζ, s',..., ζ' et ω, au moyen de (17).

41. Formons maintenant l'expression

$$zx' - xz' + \zeta\xi' - \xi\zeta' + \sqrt{-1}\,(zy' - yz' + \zeta\eta' - \eta\zeta'),$$

qui, égalée à une constante arbitraire, est une intégrale du problème. Si nous supposons cette constante nulle, il viendra, par le changement de variables (9) et (12) et après la division par le facteur commun $\cos u + \sqrt{-1}\sin u$,

$$zs' - sz' + \cos\omega\,(\zeta\sigma' - \sigma\zeta') - \frac{\zeta\omega'}{\sigma}\sin\omega$$
$$+ \sqrt{-1}\left[z\frac{u' - \omega'}{s} + \frac{\zeta\omega'}{\sigma}\cos\omega + \sin\omega\,(\zeta\sigma' - \sigma\zeta')\right] = 0.$$

Le changement de signe de $\sqrt{-1}$ donnera une autre intégrale, et l'on en déduira sans difficulté les deux intégrales particulières

$$(sz' - zs')\sin\omega + \left(\frac{\zeta}{\sigma} - \frac{z}{s}\cos\omega\right)\omega' + \frac{zu'}{s}\cos\omega = 0,$$
$$(\sigma\zeta' - \zeta\sigma')\sin\omega + \left(\frac{z}{s} - \frac{\zeta}{\sigma}\cos\omega\right)\omega' - \frac{zu'}{s} = 0.$$

Or la variable u n'entre pas sous forme finie dans ces dernières, et la relation $u' = C$ permet de l'éliminer complétement. On obtient ainsi

$$(19)\qquad (sz' - zs')\sin\omega + \left(\frac{\zeta}{\sigma} - \frac{z}{s}\cos\omega\right)\omega' + \frac{Cz}{s}\cos\omega = P = 0,$$
$$(20)\qquad (\sigma\zeta' - \zeta\sigma')\sin\omega + \left(\frac{z}{s} - \frac{\zeta}{\sigma}\cos\omega\right)\omega' - \frac{Cz}{s} = Q = 0,$$

en désignant, pour abréger, par P et Q les premiers membres de ces deux équations. Ce sont là deux intégrales particulières de (18) qui réduisent le problème des trois corps au sixième ordre. Cette méthode ne diffère de celle qui a été exposée dans la première Section que par la forme canonique (18) donnée maintenant aux équations différentielles.

42. Conformément à la théorie rappelée au Chapitre précédent, il est naturel d'essayer de faire servir les équations (19) et (20) à une nouvelle réduction de l'équation aux dérivées partielles (17), en prenant pour V une solution singulière, à deux constantes arbitraires, outre C, H et la constante additive.

En faisant les opérations indiquées par le symbole $[\ldots]$, relativement aux dix variables $s, \sigma, \ldots, \omega'$, il viendra d'abord identiquement

$$(21)\qquad [H, P] = 0, \quad [H, Q] = 0,$$

à cause des conditions $P = Q = 0$, et en remarquant que U dépend uniquement des trois binômes $s^2 + z^2$, $\sigma^2 + \zeta^2$, $s\sigma\cos\omega + z\zeta$.

Il faudrait encore qu'on eût aussi

$$(22)\qquad [P, Q] = 0.$$

Mais on s'assure qu'on a, en supposant toujours $P = Q = 0$,

$$\frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial Q}{\partial s'} - \frac{\partial P}{\partial s'}\frac{\partial Q}{\partial s} + \ldots + \frac{\partial P}{\partial \omega}\frac{\partial Q}{\partial \omega'} - \frac{\partial P}{\partial \omega'}\frac{\partial Q}{\partial \omega} = C \sin \omega.$$

Ainsi la constante C doit être nulle pour que les conditions (21) et (22) soient remplies à la fois et pour que les équations (17), (19) et (20), aux dérivées partielles, soient compatibles et satisfaites par une même fonction V des cinq variables s, σ, z, ζ et ω.

45. Dans cette hypothèse, ces équations deviennent

$$(23) \qquad U - \frac{1}{2m}\left(s'^2 + z'^2 + \frac{\omega'^2}{s^2}\right) - \frac{1}{2\mu}\left(\sigma'^2 + \zeta'^2 + \frac{\omega'^2}{\sigma^2}\right) = H;$$

$$(24) \qquad \begin{cases} (sz' - zs')\sin\omega + \left(\dfrac{\zeta}{\sigma} - \dfrac{z}{s}\cos\omega\right)\omega' = 0, \\ (\sigma\zeta' - \zeta\sigma')\sin\omega + \left(\dfrac{z}{s} - \dfrac{\zeta}{\sigma}\cos\omega\right)\omega' = 0, \end{cases}$$

et l'élimination de z' et ζ' transforme la première équation en

$$(25) \qquad \begin{cases} U - \dfrac{1}{2m}\left(s'^2 + \dfrac{\omega'^2}{s^2}\right) - \dfrac{1}{2\mu}\left(\sigma'^2 + \dfrac{\omega'^2}{\sigma^2}\right) \\ \quad - \dfrac{1}{2ms^2\sin^2\omega}\left[zs'\sin\omega + \left(\dfrac{z}{s}\cos\omega - \dfrac{\zeta}{\sigma}\right)\omega'\right]^2 \\ \quad - \dfrac{1}{2\mu\sigma^2\sin^2\omega}\left[\zeta\sigma'\sin\omega + \left(\dfrac{\zeta}{\sigma}\cos\omega - \dfrac{z}{s}\right)\omega'\right]^2 = H. \end{cases}$$

L'intégration de cette nouvelle équation, qui ne renferme plus que les trois variables s, σ et ω, dépendra uniquement de celle du système aux dérivées ordinaires du quatrième ordre

$$(26) \qquad \frac{ds'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial s}, \quad \frac{d\sigma'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial\sigma}, \quad \frac{ds}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial s'}, \quad \frac{d\sigma}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial\sigma'},$$

où l'on donnerait à ω' sa valeur tirée de (25). Les intégrales de (26), convenablement choisies, devraient appartenir au problème des trois corps ainsi restreint.

CHAPITRE III.

NOUVELLES SIMPLIFICATIONS DANS LE CAS PARTICULIER OU LES CONSTANTES DES AIRES SONT NULLES.

44. Les équations (25) et (26) sont susceptibles de prendre une forme moins compliquée. Remarquons d'abord que chacune des équations linéaires (24) s'intègre rigoureusement. La première donne lieu, en effet, aux équations simultanées

$$\frac{dz}{s} = \frac{-ds}{z} = \frac{s\sigma \sin\omega\, d\omega}{s\zeta - z\sigma\cos\omega},$$

et, en y considérant σ et ζ comme deux constantes, on obtient sans peine les deux intégrales

$$\alpha = s^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \beta = z\zeta + s\sigma\cos\omega :$$

V doit donc être une fonction de ces deux binômes, et, en intégrant de même la seconde équation (24), on reconnaît que la fonction V dépend uniquement des trois binômes $s^2 + z^2$, $\sigma^2 + \zeta^2$ et $z\zeta + s\sigma\cos\omega$ ou encore des trois trinômes

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad \text{et} \quad x\xi + y\eta + z\zeta$$

dans le système des variables primitives x, y, z, ξ, η et ζ.

45. Nous changerons la signification des variables s, σ et ω, et nous supposerons maintenant que ces lettres expriment deux côtés et l'angle compris du triangle des trois corps. Nous aurons ainsi

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \sigma^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad s\sigma\cos\omega = x\xi + y\eta + z\zeta$$

et, si nous introduisons, en même temps, les variables conjuguées,

$$(27) \qquad s' = \frac{\partial V}{\partial s}, \quad \sigma' = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad \omega' = \frac{\partial V}{\partial \omega},$$

il y aura, entre les variables x, y,..., ζ' et les nouvelles, les relations

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{s}\left(s' + \frac{\omega'}{s}\cot\omega\right) - \frac{\xi\omega'}{s\sigma\sin\omega},\\
y' &= \frac{y}{s}\left(s' + \frac{\omega'}{s}\cot\omega\right) - \frac{\eta\omega'}{s\sigma\sin\omega},\\
z' &= \frac{z}{s}\left(s' + \frac{\omega'}{s}\cot\omega\right) - \frac{\zeta\omega'}{s\sigma\sin\omega};\\
\xi' &= \frac{\xi}{\sigma}\left(\sigma' + \frac{\omega'}{\sigma}\cot\omega\right) - \frac{x\omega'}{s\sigma\sin\omega},\\
\eta' &= \frac{\eta}{\sigma}\left(\sigma' + \frac{\omega'}{\sigma}\cot\omega\right) - \frac{y\omega'}{s\sigma\sin\omega},\\
\zeta' &= \frac{\zeta}{\sigma}\left(\sigma' + \frac{\omega'}{\sigma}\cot\omega\right) - \frac{z\omega'}{s\sigma\sin\omega}.
\end{aligned}\right.$$

Ces dernières démontrent *a posteriori* la possibilité de rendre identiques à la fois les équations

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
xy' - yx' + \xi\eta' - \eta\xi' &= 0,\\
yz' - zy' + \eta\zeta' - \zeta\eta' &= 0,\\
zx' - xz' + \zeta\xi' - \xi\zeta' &= 0.
\end{aligned}\right.$$

qui sont une conséquence immédiate des équations (28).

46. Si l'on porte les valeurs (28) dans l'équation (1), elle prendra cette forme plus simple

$$(30)\qquad U - \frac{s'^2}{2m} - \frac{\sigma'^2}{2\mu} - \frac{\omega'^2}{2}\left(\frac{1}{ms^2} + \frac{1}{\mu\sigma^2}\right) = H,$$

où n'entrent plus que les trois variables s, σ et ω, et les dérivées partielles de V par rapport à ces dernières. V dépendra donc, après avoir résolu l'équation (30), par rapport à ω', des deux seules intégrales du système canonique du quatrième ordre

$$(31)\qquad \frac{ds'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial s},\quad \frac{d\sigma'}{d\omega} = \frac{\partial\omega'}{\partial\sigma};\quad \frac{ds}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial s'},\quad \frac{d\sigma}{d\omega} = -\frac{\partial\omega'}{\partial\sigma'}.$$

Lorsqu'on aura déterminé V avec deux constantes arbitraires α et β,

on en déduira les trois intégrales finies du problème

$$(32)\qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \sigma', \quad \frac{\partial V}{\partial H} = t_0 - t,$$

qui feront connaître, à chaque instant, s, σ et ω, où les éléments du triangle formé par les trois corps.

47. Les coordonnées finies x, y, z, ξ, η et ζ, rapportées à trois axes fixes arbitraires, sont exprimables au moyen de trois angles φ, ν et ψ qui détermineraient la position du triangle dans l'espace, et qu'il faut joindre à s, σ et ω. Or les quatre intégrales des aires et des forces vives fournissent quatre équations du premier ordre, entre le temps t et les variables φ, ψ, et ν où l'une d'elles ψ, celle du nœud, n'entrera que par sa différentielle. Après élimination de φ, $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$, on obtiendra donc une équation du premier ordre en ν, et de la même manière une autre en φ. Enfin l'angle ψ sera donné par une quadrature finale.

CHAPITRE IV.

DU CAS OU LE MOUVEMENT A LIEU DANS UN PLAN ET DU PROBLÈME GÉNÉRAL.

48. Pour étendre la solution précédente au cas ordinaire où les aires ne sont plus nulles, nous commencerons par supposer que les trois corps se meuvent dans un même plan.

Après avoir tracé dans ce plan un premier axe fixe OX, nous imaginerons un second axe mobile OΞ faisant, avec le premier, un angle variable χ, de telle sorte que la somme des aires relatives, comptées à partir de cette droite, soit constamment nulle.

Soient u, θ, s et σ les angles et les rayons vecteurs qui fixent les positions des mobiles m et μ par rapport à OX, et soient de plus u' et θ' les angles de ces rayons vecteurs avec l'axe mobile OΞ; on aura, d'après notre convention,

$$(33)\qquad ms^2 \frac{du'}{dt} + \mu\sigma^2 \frac{d\theta'}{dt} = 0,$$

d'où l'on tire, en introduisant l'angle $\omega = \theta' - u' = \theta - u$,

$$(34)\qquad \frac{du'}{dt} = -\frac{\mu\sigma^2}{ms^2+\mu\sigma^2}\frac{d\omega}{dt},\quad \frac{d\theta'}{dt} = \frac{ms^2}{ms^2+\mu\sigma^2}\frac{d\omega}{dt}.$$

L'expression T de la demi-somme des forces vives sera

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2\left(\frac{d\chi}{dt}+\frac{du'}{dt}\right)^2\right] + \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \sigma^2\left(\frac{d\chi}{dt}+\frac{d\theta'}{dt}\right)^2\right]$$

ou, après substitution des valeurs (34),

$$(35)\quad T = \frac{ms^2+\mu\sigma^2}{2}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mu\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] + \frac{m\mu s^2\sigma^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Comme χ, de même que u, θ, u' et θ', n'entre pas dans U, et que ces variables ne figurent dans T que par leurs différentielles, le mouvement est parfaitement défini par le système des quatre variables s, σ, ω et χ, auxquelles il faudra joindre ultérieurement les relations différentielles (34). Les formules de Lagrange peuvent donc être appliquées à l'expression (35) de T, qui est homogène, et du second degré par rapport à $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d\sigma}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\chi}{dt}$. En posant, avec Hamilton,

$$(36)\qquad \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{ds}{dt}\right)} = s',\quad \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)} = \sigma',\quad \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} = \omega',\quad \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\chi}{dt}\right)} = \chi',$$

on formera ensuite l'équation

$$(37)\qquad U - \frac{s'^2}{2m} - \frac{\sigma'^2}{2\mu} - \frac{\omega'^2}{2}\left(\frac{1}{ms^2}+\frac{1}{\mu\sigma^2}\right) - \frac{\chi'^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)} = H,$$

analogue à (30), où s', σ', ω' et χ' pourront être remplacés par les dérivées partielles, suivant s, σ, ω et χ, d'une même fonction caractéristique S.

49. Si l'on fait maintenant

$$(38)\qquad \chi' = C,$$

et

$$(39) \qquad S = C\chi + V;$$

attendu que χ n'est pas dans U, l'équation (37) deviendra, en changeant S en V,

$$(40) \qquad \left[U - \frac{C^2}{2(ms^2 + \mu\sigma^2)}\right] - \frac{s'^2}{2m} - \frac{\sigma'^2}{2\mu} - \frac{\omega'^2}{2}\left(\frac{1}{ms^2} + \frac{1}{\mu\sigma^2}\right) = H,$$

dont l'intégration, comme celle de (30), dépend du quatrième ordre des différences ordinaires.

Le problème que nous examinons rentre donc dans celui qui a été résolu au Chapitre III, après avoir retranché de la fonction des forces U le terme $\frac{C^2}{2(ms^2 + \mu\sigma^2)}$.

Lorsqu'on aura obtenu la solution complète V de (40), avec les constantes arbitraires α et β, les trois intégrales finies du problème seront

$$(41) \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial V}{\partial H} = t_0 - t;$$

on aura, d'ailleurs, par une quadrature finale,

$$u = u' + \chi \quad \text{ou} \quad \theta = \theta' + \chi,$$

au moyen de l'intégrale C des aires, ou encore

$$(42) \quad u' = -\frac{1}{m}\int \frac{\partial V}{\partial \omega}\frac{dt}{s^2}, \quad \theta' = \frac{1}{\mu}\int \frac{\partial V}{\partial \omega}\frac{dt}{\sigma^2}, \quad \chi = \int \frac{C\,dt}{ms^2 + \mu\sigma^2} = \chi_0 - \frac{dV}{dC},$$

et toutes les variables seront ainsi exprimées en fonctions du temps.

50. Pour traiter, de la même manière, le problème général, nous tracerons encore, dans le plan du triangle des trois corps, une droite mobile, à partir de laquelle la somme des aires décrites par les rayons s et σ soit nulle, et nous représenterons la vitesse de rotation de cette ligne, dans ce plan, par $\frac{d\chi}{dt}$. Supposons que les deux corps mobiles

soient animés de vitesses quelconques perpendiculaires au même plan, outre celles qui produisent la déformation continue du triangle des trois corps. En faisant abstraction de ces dernières, le triangle passera de sa position à la position infiniment voisine par une rotation instantanée autour d'une droite particulière située dans le plan du triangle. On peut évidemment décomposer cette rotation en deux, l'une $\frac{d\rho}{dt}$ dirigée suivant le côté s du triangle, et l'autre $\frac{d\varpi}{dt}$ suivant OΠ, menée perpendiculairement à ce côté, dans le plan du triangle des trois corps. Les nouvelles variables ρ et ϖ seront représentées, de même que χ, par les longueurs de deux lignes courbes convenables, tracées sur une sphère dont le centre est en O, et dont le rayon est égal à l'unité. L'expression T de la demi-somme des forces vives du mouvement des deux corps m et μ deviendra, par suite,

$$\begin{aligned} T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2\left(\frac{d\chi}{dt} + \frac{du'}{dt}\right)^2 + s^2\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\right] \\ + \frac{\mu}{2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \sigma^2\left[\left(\frac{d\chi}{dt} + \frac{d\theta'}{dt}\right)^2 + \sin^2\omega\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\right] \\ + \sigma^2\cos^2\omega\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

ou, en tenant compte des relations (34) qui subsistent,

$$(43)\quad \begin{aligned} T = \frac{ms^2 + \mu\sigma^2}{2}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \frac{ms^2 + \mu\sigma^2\cos^2\omega}{2}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2 + \frac{\mu\sigma^2\sin^2\omega}{2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \\ + \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mu\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - \frac{m\mu s^2\sigma^2}{ms^2 + \mu\sigma^2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Comme les variables χ, ϖ, ρ, de même que les précédentes u' et θ', n'entrent dans T que sous forme de différentielles, le mouvement est amené, comme plus haut, à dépendre des trois seules variables s, σ et ω. Si l'on fait

$$(44)\quad \rho' = \frac{\partial T}{\partial \frac{d\rho}{dt}} = \mu\sigma^2\sin^2\omega\frac{d\rho}{dt}, \quad \varpi' = \frac{\partial T}{\partial \frac{d\varpi}{dt}} = (ms^2 + \mu\sigma^2\cos^2\omega)\frac{d\varpi}{dt},$$

on joindra ces variables aux précédentes (36) pour former l'équation

$$(45)\qquad \left[U - \frac{\chi'^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)} - \frac{\rho'^2}{2\mu\sigma^2\sin^2\omega} - \frac{\varpi'^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2\cos^2\omega)}\right] - \frac{s'^2}{2m} - \frac{\sigma'^2}{2\mu} - \frac{\omega'^2}{2}\left(\frac{1}{ms^2}+\frac{1}{\mu\sigma^2}\right) = H,$$

où s', σ', ω', χ', ρ' et ϖ' sont les dérivées partielles de la fonction caractéristique S. Posons, comme ci-dessus,

$$(46)\qquad \chi' = C,\ \rho' = F,\ \varpi' = G$$

et

$$(47)\qquad S = C\chi + F\rho + G\varpi + V,$$

en désignant par C, F et G trois constantes arbitraires. Le mouvement sera déterminé par l'intégration de (30) où il suffira de remplacer la fonction U par

$$U - \frac{C^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2)} - \frac{F^2}{2\mu\sigma^2\sin^2\omega} - \frac{G^2}{2(ms^2+\mu\sigma^2\cos^2\omega)}.$$

Les six intégrales finies du problème deviendront, en appelant α et β les constantes arbitraires de V, et α', β', χ_0, ρ_0, ϖ_0 et t_0 six autres constantes,

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', & \dfrac{\partial V}{\partial \beta} = \beta', & \dfrac{\partial V}{\partial H} = t_0 - t, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial C} = \chi_0 - \chi, & \dfrac{\partial V}{\partial F} = \rho_0 - \rho, & \dfrac{\partial V}{\partial G} = \varpi_0 - \varpi, \end{cases}$$

dont les trois premières feront connaître tous les éléments du triangle des trois corps en fonction de C, F, G et t.

51. Les constantes arbitraires C, F et G ne sont ici autre chose, comme il est bien facile de s'en assurer, que le double des sommes des aires prises par rapport au plan du triangle des trois corps et à deux plans perpendiculaires au côté s et à la droite perpendiculaire OH. Ces quantités sont, on le voit, exprimables, sous forme finie, à l'aide des

constantes des aires relatives à trois plans coordonnés rectangulaires invariables, et des angles ψ, φ et ν qui fixent dans l'espace la position variable du triangle des trois corps, savoir, ψ l'angle du nœud, φ l'inclinaison sur le plan fixe (du maximum des aires), et l'angle ν du côté s avec la ligne des nœuds; et ces quantités C, F et G sont, par suite, tout à fait indépendantes des variables s, σ et ω qui entrent seules, sous forme finie et sous forme différentielle, dans (45). Lorsque les éléments du triangle des trois corps seront connus, au moyen de la solution singulière V et des trois premières équations (48), on devra faire varier les angles ψ, φ et ν, ainsi que les fonctions désignées par C, F et G, et l'on déterminera finalement ces angles comme il a été dit au n° **47**, par les équations des aires et des forces vives. Le problème sera ainsi résolu dans toute sa généralité.

52. On voit donc qu'en ajoutant à la fonction des forces U quelques termes fort simples, où n'entrent que les éléments mêmes du triangle des trois corps, le problème sera rendu identique à celui que nous avons considéré dans les deux Chapitres précédents, où les constantes des aires ont été supposées nulles. En écartant quelques difficultés secondaires, le problème qu'il reste à résoudre devient semblable à celui du mouvement d'un point unique assujetti à se mouvoir sur un plan. Le temps, remplacé ici par la variable angulaire ω, est renfermé explicitement, il est vrai, dans la fonction connue des forces; mais les équations du mouvement ont la forme canonique.

Sur certains nombres complexes compris dans la formule $a+b\sqrt{-c}$;

PAR LE P. PEPIN, S. J.

1. Euler, dans la seconde Partie de son Algèbre (Chap. XII, XIII et XV), résout plusieurs questions d'Analyse indéterminée à l'aide des nombres complexes compris dans la formule générale $p+q\sqrt{c}$, dans laquelle p et q désignent deux nombres entiers quelconques, et c un nombre entier négatif, ou un nombre entier positif non carré. Ayant reconnu que le produit de deux fonctions semblables

$$p+cq^2, \quad r^2+cs^2$$

est une fonction semblable

$$(pr \pm cqs)^2 + c(ps \mp qr)^2,$$

il conclut que, pour transformer en carré la forme x^2+cy^2, dans le cas où c est premier, il faut poser

$$x+y\sqrt{-c} = m(p+q\sqrt{-c})^2.$$

ce qui donne

$$x = m(p^2-cq^2), \quad y = 2mpq,$$

m désignant le plus grand commun diviseur des deux nombres x et y. Dans le cas où c peut se décomposer en deux facteurs a et b, Euler pose

$$x+y\sqrt{-a.b} = (\sqrt{a}.p+\sqrt{-b}.q)^2,$$

d'où

$$x = ap^2-bq^2, \quad y = 2pq, \quad x^2+cy^2 = (ap^2+bq^2)^2.$$

2. Il est évident que les valeurs de x et de y, obtenues par cette

méthode, rendent la formule $x^2 + cy^2$ égale à un carré; mais il faudrait bien se garder d'affirmer qu'un problème est impossible lorsque cette méthode ne donne aucune solution. Il est des cas, il est vrai, où ce moyen donne toutes les solutions possibles du problème; mais plus souvent encore il est insuffisant. Il est donc nécessaire de n'introduire ces nombres complexes dans l'Analyse qu'en déterminant les conditions nécessaires pour rendre leur emploi légitime. C'est ce qu'Euler n'a pas fait; par exemple, il se propose cette question : « Trouver les carrés qui, multipliés par 5 et ajoutés à 7, produisent des cubes. » Cette question revient évidemment à trouver, parmi les solutions entières de l'équation $5x^2 + 7y^2 = z^3$, celles dans lesquelles $y = \pm 1$. Or, en appliquant sa méthode, Euler obtient, pour exprimer les solutions de cette équation, les formules suivantes :

$$x = 5p^3 - 21pq^2, \quad y = q(15p^2 - 7q^2), \quad z = 5p^2 + 7q^2,$$

dans lesquelles on doit attribuer aux indéterminées p et q toutes les valeurs rationnelles d'où résultent des valeurs entières pour x, y et z; puis, ayant reconnu que la seule solution dans laquelle y soit égal à ± 1 correspond aux valeurs $p = q = \pm \frac{1}{2}$, qui donnent $x = \pm 2$, $y = \pm 1$, Euler conclut que 4 est le seul carré qui réponde à la question.

Cette conclusion n'est pas légitime, puisque les formules données par Euler ne sont pas les seules qui puissent transformer en un cube la forme $5x^2 + 7y^2$; on satisfait également à cette condition par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} x &= 2p^3 + 9p^2q - 18pq^2 - 16q^3, \\ y &= p^3 - 9p^2q - 18pq^2 + 8q^3, \\ z &= 3p^2 + 2pq + 12q^2. \end{aligned}$$

On en déduit la solution d'Euler en posant

$$q = 0, \; p = 1, \quad \text{d'où} \quad y = 1, \; x = 2, \; z = 3.$$

Ces formules et celles d'Euler renferment bien toutes les solutions du problème : on les obtient même toutes en ne donnant que des valeurs

entières aux nombres p et q; mais, pour conclure que 4 est le seul carré qui, multiplié par 5 et ajouté à 7, produit un cube, il reste à démontrer que l'unique manière de vérifier en nombres entiers l'équation

$$p^3 - 9p^2q - 18pq^2 + 8q^3 = \pm 1$$

est de poser $q = 0$, $p = \pm 1$. C'est ce que nous allons faire, afin de compléter la démonstration d'Euler.

On a identiquement

$$(p + 2q)(p^2 - 11pq + 4q^2) = p^3 - 9p^2q - 18pq^2 + 8q^3;$$

cette formule ne peut donc se réduire à ± 1 que pour des valeurs de p et q propres à vérifier les deux équations

$$p + 2q = \pm 1, \quad p^2 - 11pq + 4q^2 = \pm 1.$$

Or le système de ces deux équations n'admet que les solutions rationnelles $q = 0, p = \pm 1$; $p = 0$, $q = \pm \frac{1}{2}$, et des solutions non rationnelles. Les deux solutions rationnelles donnent $x = \pm 2$, $y = \pm 1$, $z = 3$; ce qui vérifie l'assertion d'Euler.

3. On ne peut pas non plus considérer comme entièrement démontrés les deux théorèmes de Fermat, qui sont l'objet des deux premières questions du Chapitre XII, tant que l'on n'a pas justifié l'emploi de la méthode précédente pour les deux formes $x^2 + y^2$, $x^2 + 2y^2$. Or, c'est ce qui n'a été fait ni par Euler, ni par Legendre; celui-ci s'est contenté de reproduire sur ce point les démonstrations d'Euler. Gauss est le premier qui ait introduit les nombres complexes d'une manière complétement rigoureuse; mais il ne l'a fait que pour les nombres complexes $a + b\sqrt{-1}$, dont il a donné la théorie dans son second Mémoire *Sur les résidus biquadratiques*. On trouve aussi les éléments de cette théorie dans un Mémoire de Dirichlet *Sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes* (*Journal de Crelle*, t. XXIV). Le même savant a considéré les nombres complexes $a + b\sqrt{5}$, dans son Mémoire *Sur l'impossibilité de l'équation* $x^5 + y^5 + z^5 = 0$, et les nombres complexes de la forme $a + b\sqrt{-7}$ dans son Mémoire

Sur l'impossibilité de l'équation $x^{14} + y^{14} = z^{14}$. Dans le premier de ces Mémoires (*Journal de Crelle*, t. III, p. 354), Dirichlet démontre que l'unique manière de vérifier l'équation

$$P^2 - 5Q^2 = z^5,$$

quand la seconde indéterminée Q doit être divisible par 5, est de poser

$$P + Q\sqrt{5} = (\varphi \pm \psi\sqrt{5})^5, \quad z = \varphi^2 - 5\psi^2;$$

et dans l'autre Mémoire (*Journal de Crelle*, t. IX, p. 391) il s'appuie sur ce théorème, que la manière la plus générale de rendre égale à une quatorzième puissance la formule $\varphi^6 + 7\psi^2$, où φ et ψ désignent deux nombres entiers et premiers entre eux, est de poser

$$\varphi^3 + \psi\sqrt{-7} = (g + h\sqrt{-7})^{14},$$

et il indique pour ce théorème une démonstration semblable à celle qui concerne l'équation

$$P^2 - 5Q^2 = z^5.$$

4. Les nombres complexes $a + b\sqrt{-1}$, $a + b\sqrt{5}$, $a + b\sqrt{-7}$ sont-ils les seuls auxquels on puisse appliquer la méthode d'Euler? Nous montrerons qu'il en est plusieurs autres. De plus, l'emploi des nombres complexes $a + b\sqrt{-7}$ n'est pas borné au cas particulier considéré par Dirichlet; il est aussi étendu, nous le verrons, que celui des nombres complexes $a + b\sqrt{-1}$, du moins tant qu'il s'agit d'égaler la formule $x^2 + 7y^2$ à une puissance d'un nombre impair. Quels sont donc les nombres complexes que l'on peut introduire dans l'analyse indéterminée des nombres entiers, et quelles sont les conditions nécessaires pour en légitimer l'usage? Telle est la question que je me propose de résoudre dans la première Partie de ce Mémoire; non pas, il est vrai, d'une manière complète, mais en me bornant aux nombres complexes compris dans la formule $a + b\sqrt{-c}$, où a et b désignent des nombres entiers quelconques, et c un nombre entier et positif. La seconde Partie du Mémoire est consacrée à montrer, par la solution d'un grand nombre de problèmes, les avantages de la théorie exposée dans la première Partie.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

3. Nous rappellerons d'abord un théorème déjà démontré par Legendre.

THÉORÈME I. — *Si le nombre p^2+cq^2 est impair et premier à c, et que les deux nombres p et q soient premiers entre eux, les nombres entiers x et y déterminés par l'équation*

$$x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})^m \tag{1}$$

sont premiers entre eux.

Démonstration. — Soit θ un nombre premier diviseur commun des deux nombres x et y; l'équation $x^2+cy^2=(p^2+cq^2)^m$ montre que θ doit être diviseur de p^2+cq^2; θ est donc impair et premier relativement à c. D'ailleurs la valeur de x déterminée par l'équation proposée est

$$x=p^m-\frac{m(m-1)}{1.2}cq^2\,p^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}c^2q^4p^{m-4}-\ldots.$$

Si dans le second membre on remplace partout cq^2 par $-p^2$, on aura, à cause de la congruence $cq^2\equiv-p^2\pmod{\theta}$,

$$\begin{aligned}x&\equiv p^m\left[1+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}+\ldots\right]\\&\equiv\tfrac{1}{2}p^m[(1+1)^m+(1-1)^m]\equiv 2^{m-1}p^m\pmod{\theta}.\end{aligned}$$

Or, θ étant diviseur impair de x, devrait diviser p; mais alors on conclurait de la congruence $cq^2\equiv-p^2\pmod{\theta}$, que le produit cq^2 serait divisible par θ, ce qui est impossible, puisque c est premier relativement à θ, et q relativement à p, multiple de θ. Les deux nombres x et y n'ont donc pas de diviseur commun.

6. Théorème II. — *Soient*

$$a^2 + ca_1^2 = \mathrm{A}, \quad b^2 + cb_1^2 = \mathrm{B};$$

si A *et* B *sont premiers entre eux et premiers relativement à* c, *si de plus les deux nombres* a *et* a_1 *sont premiers entre eux, ainsi que les deux nombres* b *et* b_1, *les nombres* x, y *déterminés par l'équation*

$$(2) \qquad x + y\sqrt{-c} = (a + a_1\sqrt{-c})(b + b_1\sqrt{-c})$$

sont aussi premiers entre eux.

On déduit, en effet, de cette équation

$$x^2 + cy^2 = (a^2 + ca_1^2)(b^2 + cb_1^2) = \mathrm{AB};$$

en sorte que, si un nombre premier θ divisait en même temps x et y, il diviserait l'un des deux nombres A ou B sans diviser l'autre. Supposons B divisible par θ et A premier relativement à θ, et multiplions les deux membres de l'équation (2) par l'expression $a - a_1\sqrt{-c}$; du résultat de cette multiplication,

$$(ax + a_1cy) + \sqrt{-c}(ay - a_1x) = \mathrm{A}b + \sqrt{-c}\,\mathrm{A}b_1,$$

on déduit

$$ax + a_1cy = \mathrm{A}b, \quad ay - a_1x = \mathrm{A}b_1.$$

Le nombre θ devrait donc diviser en même temps les deux produits $\mathrm{A}b$, $\mathrm{A}b_1$, et, comme il est premier avec A, il diviserait les deux nombres b et b_1, contrairement à l'hypothèse. Donc les deux nombres x et y sont premiers entre eux.

7. Corollaire I. — *L'équation*

$$x + y\sqrt{-c} = (a + b\sqrt{-c})(p + q\sqrt{-c})^m$$

détermine pour x *et* y *des valeurs entières et premières entre elles, toutes les fois que, les deux nombres* $a^2 + cb^2$, $p^2 + cq^2$ *étant impairs*

et premiers entre eux, comme avec le déterminant $-c$, les deux nombres a et b sont premiers entre eux, ainsi que les nombres p et q.

En effet, si l'on pose $(p+q\sqrt{-c})^m = P+Q\sqrt{-c}$, les deux fonctions entières de p, q et c désignées par P et Q auront des valeurs entières et premières entre elles (théorème I), en sorte que l'équation

$$x+y\sqrt{-c} = (a+b\sqrt{-c})(P+Q\sqrt{-c})$$

remplira les conditions du théorème II; les nombres x et y seront donc premiers entre eux.

Corollaire II. — *Si les nombres a^2+cb^2, $a_1^2+cb_1^2$, $a_2^2+cb_2^2$,... sont impairs, premiers entre eux deux à deux et premiers relativement à c, si en outre les deux nombres a et b sont premiers entre eux, ainsi que les deux nombres a_1 et b_1, a_2 et b_2,..., l'équation*

$$x+y\sqrt{-c} = (a+b\sqrt{-c})^m(a_1+b_1\sqrt{-c})^{m_1}(a_2+b_2\sqrt{-c})^{m_2}\ldots,$$

où m, m_1, m_2,... sont des exposants entiers et positifs, détermine, pour x et y, des valeurs entières et premières entre elles.

Posons pour les valeurs 0, 1, 2,... de i

$$(a_i+b_i\sqrt{-c})^{m_i} = A_i+B_i\sqrt{-c};$$

les nombres A_i et B_i sont entiers et premiers entre eux (théorème I). Il en est de même, en vertu du théorème II, pour les nombres x_1 et y_1, x_2 et y_2,..., déterminés par les équations successives

$$(A+B\sqrt{-c})(A_1+B_1\sqrt{-c}) = x_1+y_1\sqrt{-c},$$
$$(A_2+B_2\sqrt{-c})(x_1+y_1\sqrt{-c}) = x_2+y_2\sqrt{-c},\ldots$$

et, comme cette suite de nombres x_1, y_1; x_2, y_2;... se termine aux nombres x et y, ceux-ci sont aussi premiers entre eux.

Tous ces théorèmes que nous venons d'établir supposent simplement que $-c$ ne soit pas un carré, en sorte que toute équation

$$A+B\sqrt{-c} = P+Q\sqrt{-c},$$

où A et B, P et Q désignent des nombres rationnels, soit équivalente aux deux équations

$$A = P, \quad B = Q.$$

Dans ce qui va suivre, nous supposerons que c désigne un nombre entier et positif, et nous considérerons d'abord le cas où toutes les formes quadratiques positives et impaires de déterminant $-c$ sont comprises dans une même classe. L'emploi du facteur complexe $p + q\sqrt{-c}$, conformément à la méthode d'Euler, est alors parfaitement légitime. C'est ce que nous verrons dans les théorèmes suivants; mais auparavant nous rappellerons certaines relations entre les représentations propres d'un nombre composé M par la formule $x^2 + cy^2$, et les solutions de la congruence $x^2 + c \equiv 0 \pmod{M}$.

8. Nous disons avec Gauss que deux nombres (x, y) forment une représentation propre d'un nombre impair M par la forme (a, b, c), lorsqu'ils sont premiers entre eux et qu'ils vérifient l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = M.$$

Il est évident d'abord que toute représentation propre d'un nombre M par la forme $x^2 + cy^2$ conduit à une solution de la congruence $x^2 + c \equiv 0 \pmod{A}$; car, x et y étant premiers entre eux, on peut poser

$$x \equiv uy \pmod{M}, \quad y^2(u^2 + c) \equiv 0 \pmod{M},$$

d'où

$$u^2 + c \equiv 0 \pmod{M}.$$

De plus, comme, dans les cas dont nous nous occupons, c n'a pas de diviseur carré impair, le nombre M est nécessairement premier avec c, et, par conséquent, la valeur de u est différente de zéro.

Réciproquement, toute racine u de la congruence

$$x^2 + c \equiv 0 \pmod{M}$$

conduit à deux représentations propres du nombre M par la forme $x^2 + cy^2$, formées par les mêmes valeurs numériques p et q, ou $-p$

et $-q$ des indéterminées x et y, dont le rapport $\frac{p}{q}$ est congru à la racine u, suivant le module M. En effet, le quotient $\frac{u^2+c}{M}$ étant un nombre entier, la formule

$$Mx^2 - 2uxy + \frac{u^2+c}{M}y^2$$

sera une forme quadratique de déterminant $-c$, équivalente par conséquent à la forme x^2+cy^2, puisque nous supposons que toutes les formes quadratiques de déterminant $-c$ appartiennent à une même classe. Soit donc $x = px' + p_0y'$, $y = qx' + q_0y'$ la substitution propre à transformer $(1, 0, c)$ en la forme équivalente $\left(M, u, \frac{u^2+c}{M}\right)$. Comme la seconde forme devient égale à M pour les valeurs $x' = \pm 1$, $y' = 0$, la première x^2+cy^2 représentera aussi le nombre M pour les valeurs $x = p$, $y = q$, et pour les valeurs opposées $x = -p$, $y = -q$. Ce sont deux représentations propres, car les nombres p et q, devant satisfaire à la relation $pq_0 - qp_0 = 1$, sont nécessairement premiers entre eux. Enfin de l'équation

$$(px' + p_0y')^2 + c(qx' + q_0y')^2 = Mx'^2 + 2ux'y' + \frac{u^2+c}{M}y'^2$$

on déduit

$$p^2 + cq^2 = M, \quad pp_0 + cqq_0 = -u,$$

d'où

$$p(pq_0 - qp_0) = Mq_0 + qu, \quad p \equiv qu \,(\text{mod. } M);$$

ainsi le rapport $\frac{p}{q}$ est équivalent suivant le module M à la racine u. Soit 2^λ le nombre des racines de la congruence $x^2 + c \equiv 0 \,(\text{mod. } M)$. A chacune de ces racines correspondront deux représentations propres du nombre M par la forme x^2+cy^2, en sorte que le nombre de toutes ces représentations sera $2^{\lambda+1}$.

9. Théorème III. — *La manière la plus générale de résoudre l'équation*

$$(3) \qquad x^2 + cy^2 = z^m,$$

quand les nombres x, y et z doivent être entiers et premiers entre eux, et qu'en outre z doit être impair, est de poser

$$(4) \qquad (p + q\sqrt{-c})^m = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-c},$$

de prendre $x = \pm \mathrm{P}$, $y = \pm \mathrm{Q}$, $z = p^2 + cq^2$, et d'attribuer aux lettres p et q toutes les valeurs entières et premières entre elles, qui déterminent pour z des valeurs impaires.

Démonstration. — Comme, par hypothèse, toutes les formes quadratiques positives et impaires de déterminant $-c$ sont équivalentes à la forme principale $x^2 + cy^2$, toutes les valeurs impaires de z propres à vérifier l'équation (3) sont de la forme $p^2 + cq^2$. Ainsi nos formules donnent pour z toutes les valeurs convenables; il reste à démontrer qu'elles font correspondre à chaque valeur de z toutes les valeurs compatibles de x et de y. D'abord les valeurs $x = \pm \mathrm{P}$, $y = \pm \mathrm{Q}$ sont bien premières entre elles (théorème I), et forment ainsi des représentations propres du nombre z^m par la forme $x^2 + cy^2$. Nous aurons démontré que nos formules donnent toutes les représentations propres de z^m par la forme $x^2 + cy^2$, et, par suite, qu'elles font correspondre à chaque valeur de z toutes les valeurs compatibles de x et de y, si nous faisons voir qu'en prenant successivement pour p et q toutes les représentations propres de z par la forme $x^2 + cy^2$, les valeurs correspondantes de $\pm \mathrm{P}$, $\pm \mathrm{Q}$ formeront toutes les représentations propres de z^m par la même forme. Or, d'après ce que nous avons dit plus haut (8), ce dernier point est obtenu si nous montrons que les valeurs du rapport $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ sont congrues aux diverses racines de la congruence

$$x^2 + c \equiv 0 \pmod{z^m}.$$

On sait d'ailleurs que les diverses racines de cette congruence correspondent une à une aux diverses racines de la congruence

$$x^2 + c \equiv 0 \pmod{z}$$

et leur sont respectivement congrues suivant le module z. Il suffit donc de montrer que les diverses valeurs du rapport $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ déterminées par

nos formules sont congrues suivant le module z aux diverses racines de la congruence $x^2+c\equiv 0$ (mod. z), de telle sorte qu'à une racine α de cette congruence corresponde une valeur congrue, suivant le module z, du rapport $\frac{P}{Q}$. Et, en effet, les valeurs de P et Q qui satisfont à cette condition sont déterminées par celle des solutions de l'équation $p^2+q^2c=z$, dont les termes p et q sont liés entre eux par la relation $\frac{p}{q}\equiv\alpha$ (mod. z). Pour le démontrer, il suffit de multiplier par $p-q\sqrt{-c}$ les deux membres de l'équation (4), ce qui donne

$$(p+q\sqrt{-c})^{m-1}(p^2+cq^2)=(Pp+cqQ)+\sqrt{-c}(Pq-Qp);$$

posant donc

$$(p+q\sqrt{-c})^{m-1}=H+K\sqrt{-c},$$

on aura

$$Pq-Qp=Kz,\quad \frac{P}{Q}\equiv\frac{p}{q}\equiv\alpha\ (\text{mod. } z).$$

Ainsi à toute racine α de la congruence $x^2+c\equiv 0$ (mod. z) nos formules font correspondre deux représentations propres P, Q; $-$P, $-$Q de z^m par la forme x^2+cy^2, telles que le rapport $\frac{P}{Q}$ soit congru à α suivant le module z. Nos formules donnent donc pour chaque valeur de z toutes les valeurs compatibles de x et de y; elles donnent, par conséquent, toutes les solutions de l'équation (3), qui satisfont aux conditions énoncées.

10. Théorème IV. — *Soient* A, B, C, ... *des diviseurs impairs de la formule* x^2+cy^2, *premiers entre eux deux à deux; pour obtenir toutes les solutions de l'équation*

$$(5)\qquad x^2+cy^2=A^m B^{m_1} D^{m_2}\ldots$$

en nombres entiers et premiers entre eux, il suffit de poser

$$(6)\quad \pm x\pm y\sqrt{-c}=(a+a_1\sqrt{-c})^m(b+b_1\sqrt{-c})^{m_1}(d+d_1\sqrt{-c})^{m_2}\ldots$$

de ramener le second membre à la forme $P+Q\sqrt{-c}$ *en effectuant*

les calculs indiqués, puis de donner dans les deux polynômes P *et* Q *aux lettres* (a, a_1), (b, b_1), (d, d_1),... *toutes les valeurs entières qui forment respectivement des représentations propres des nombres* A, B, D *par la forme* $x^2 + cy^2$.

Les valeurs de x et de y ainsi déterminées sont premières entre elles (7); elles vérifient l'équation (5), puisque celle-ci se déduit de l'équation (6) multipliée membre à membre par celle qu'on en déduit en changeant le signe de $\sqrt{-c}$. Elles forment donc des représentations propres du produit $A^m B^{m_1} D^{m_2}$...; il s'agit de démontrer que toutes les représentations propres de ce produit sont données par la formule (6), ou bien, ce qui revient au même, d'après ce qui a été dit plus haut (8), que dans les diverses solutions déduites de la formule (6) les diverses valeurs du rapport $\frac{x}{y}$ sont respectivement congrues, suivant le module $A^m B^{m_1} D^{m_2}$... à toutes les racines de la congruence

$$u^2 + c \equiv 0 \pmod{A^m B^{m_1} D^{m_2} \ldots}.$$

D'ailleurs les nombres A, B, D,... étant premiers entre eux deux à deux, on obtient toutes les racines de cette congruence en prenant, pour chacune des combinaisons α, β, δ,..., que l'on peut former avec les racines des congruences

$$(a)\quad \alpha^2 + c \equiv 0 \pmod{A^m},\ \beta^2 + c \equiv 0 \pmod{B^{m_1}},\ \delta^2 + c \equiv 0 \pmod{D^{m_2}}, \ldots,$$

la valeur de u, comprise entre $-\frac{1}{2}A^m B^{m_1} D^{m_2}$... et $+\frac{1}{2}A^m B^{m_1} D^{m_2}$,..., qui vérifie les congruences

$$(b)\quad u \equiv \alpha \pmod{A^m},\quad u \equiv \beta \pmod{B^{m_1}},\quad u \equiv \delta \pmod{D^{m_2}}, \ldots.$$

Désignons par α', β', δ',... les résidus minimum de α, β, δ,..., suivant les modules respectifs A, B, D,.... La valeur de u déterminée par les congruences (b) vérifie évidemment les suivantes :

$$(c)\quad u \equiv \alpha' \pmod{A},\quad u \equiv \beta' \pmod{B},\quad u \equiv \delta' \pmod{D}, \ldots,$$

et les nombres α', β', δ',... sont des racines des congruences respectives

$$(d)\quad \alpha'^2 + c \equiv 0 \pmod{A},\ \beta'^2 + c \equiv 0 \pmod{B},\ \delta'^2 + c \equiv 0 \pmod{D}, \ldots.$$

Or les racines des congruences (a) correspondent une à une aux racines des congruences (d) et leur sont congrues suivant les modules respectifs A, B, D,.... Nous aurons donc démontré que la formule (6) donne toutes les solutions propres de l'équation (5), si nous montrons qu'elle détermine pour chaque système de solutions α', β', δ',... des congruences (d) des valeurs de x et de y, dont le rapport désigné par u vérifie les congruences (c). Effectivement, si l'on choisit parmi les diverses valeurs possibles de (a, a_1), (b, b_1), (d, d_1),.... celles qui satisfont aux congruences

$$a \equiv \alpha' a_1 \pmod{A}, \quad b \equiv \beta' b_1 \pmod{B}, \quad d \equiv \delta' d_1 \pmod{D}, \ldots,$$

le rapport u des valeurs obtenues pour x et y vérifiera les congruences (c). Nous nous contenterons de le démontrer pour la première, la démonstration étant la même pour toutes.

Multiplions les deux membres de l'équation (6) par $a - a_1\sqrt{-c}$, et posons

$$(a + a_1\sqrt{-c})^{m-1}(b + b_1\sqrt{-c})^{m_1}(d + d_1\sqrt{-c})^{m_2}\ldots = F + G\sqrt{-c},$$

en désignant par F et par G la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-c}$ dans le développement de la fonction imaginaire renfermée dans le premier membre. Notre produit se mettra sous la forme

$$ax + a_1cy + \sqrt{-c}(ay - a_1x) = AF + AG\sqrt{-c},$$

et l'on en déduira

$$ay - a_1x = AG, \quad \frac{x}{y} \equiv \frac{a}{a_1} \equiv \alpha' \pmod{A}.$$

Ainsi la congruence $a \equiv \alpha' a_1 \pmod{A}$ entraîne comme conséquence nécessaire la congruence $\frac{x}{y} = u \equiv \alpha' \pmod{A}$. En remplaçant a, a_1, A, α', par b, b_1, B, β', ou par d, d_1, D, δ',..., nous démontrerions de même que les congruences $u \equiv \beta' \pmod{B}$, $u \equiv \delta' \pmod{D}$,... sont des conséquences des congruences $b \equiv \beta' b_1$, $d \equiv \delta' d_1$,.... Donc la méthode proposée dans notre théorème donne bien toutes les représentations propres du produit $A^m B^{m_1} D^{m_2}$,... par la forme $x^2 + cy^2$.

Ce théorème nous permet de donner à l'usage des facteurs complexes $p + q\sqrt{-c}$ une extension plus grande que celle qui résulte du théorème III.

11. Théorème V. — *Si l'on désigne par* H *un diviseur impair de la formule* $x^2 + cy^2$, *et par* x, y, z *des nombres entiers et premiers entre eux deux à deux, dont le dernier* z *doit être impair, toutes les solutions de l'équation*

$$x^2 + cy^2 = \mathrm{H}z^m, \tag{7}$$

peuvent se déduire des formules

$$\pm x \pm y\sqrt{-c} = (a + b\sqrt{-c})(p + q\sqrt{-c})^m, \quad z = p^2 + cq^2, \tag{8}$$

en y combinant successivement chacune des représentations propres (a, b) *du nombre* H *par la forme* $x^2 + cy^2$, *avec toutes les valeurs entières et premières entre elles de* p *et* q *propres à donner des valeurs impaires à la formule* $p^2 + cq^2$.

Dans le théorème III, les formules (3) et (4) sont équivalentes, sous les restrictions posées que z soit impair et que les nombres x et y soient premiers entre eux. Il n'en est pas de même des formules (7) et (8), car la dernière peut donner pour x et y des valeurs qui ne soient pas premières entre elles. Qu'on y fasse, en effet, $p = a$, $q = -b$; elle deviendra

$$\pm x \pm y\sqrt{-c} = (a^2 + cb^2)(a - b\sqrt{-c})^{m-1} = \mathrm{HA} + \mathrm{HB}\sqrt{-c},$$

les nombres rationnels et entiers A et B étant déterminés par l'équation

$$(a - b\sqrt{-c})^{m-1} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-c}.$$

On aura donc $x = \pm \mathrm{HA}$, $y = \pm \mathrm{HB}$. Mais cela n'a pas d'inconvénient, pourvu que la formule (8) donne toutes les solutions de l'équation (7) qui satisfont aux conditions énoncées. C'est ce qui a lieu effectivement, ainsi que nous allons le démontrer.

D'abord la formule $z = p^2 + cq^2$ donne bien toutes les valeurs convenables de z, puisque, par hypothèse, le déterminant $-c$ est tel, que tout diviseur impair de la formule $x^2 + cy^2$ est lui-même représenté

par cette formule. De plus, à chaque valeur de z première avec H, la formule (8) fait correspondre toutes les valeurs entières et premières entre elles de x et de y, qui forment avec cette valeur de z des solutions de l'équation (7); on le déduit immédiatement du théorème IV, en réduisant à deux le nombre des facteurs dans le second membre de l'équation (5), et en remplaçant A^m, B^{m_1} par H et z^m. Il nous suffit donc de démontrer que, dans le cas où z reçoit une valeur divisible par quelque facteur premier de H, la formule (8) donne toutes les représentations propres du produit Hz^m par la forme $x^2 + cy^2$.

Soient A_1, A_2,... les facteurs premiers communs de H et de z; posons

$$H = AA_1^{\alpha}A_2^{\beta}\ldots, \quad z = BA_1^{\alpha'}A_2^{\beta'}\ldots;$$

les nombres A, B, A_1, A_2,... seront tous premiers entre eux deux à deux. Il résulte du théorème IV que toutes les représentations propres du produit $Hz^m = AB^mA_1^{m\alpha'+\alpha}A_2^{m\beta'+\beta}\ldots$ par la forme $x^2 + cy^2$ se déduisent de la formule

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \pm x \pm y\sqrt{-c} &= (f + g\sqrt{-c})(h + k\sqrt{-c})^m \\ &\times (a_1 + b_1\sqrt{-c})^{m\alpha'+\alpha}(a_2 + b_2\sqrt{-c})^{m\beta'+\beta}\ldots \end{aligned}\right.$$

en prenant respectivement pour (f, g), (h, k), (a_1, b_1), (a_2, b_2),... toutes les représentations propres des nombres A, B, A_1, A_2,..., par la même forme $x^2 + cy^2$.

Or l'un quelconque des couples de valeurs ainsi obtenues pour x et y peut aussi se déduire de la formule (8), en y donnant aux nombres a, b, p et q les valeurs déterminées par les deux équations suivantes:

$$a + b\sqrt{-c} = (f + g\sqrt{-c})(a_1 + b_1\sqrt{-c})^{\alpha}(a_2 + b_2\sqrt{-c})^{\beta}\ldots$$
$$p + q\sqrt{-c} = (h + k\sqrt{-c})(a_1 + b_1\sqrt{-c})^{\alpha'}(a_2 + b_2\sqrt{-c})^{\beta'}\ldots,$$

où les valeurs des nombres (f, g), (h, k),... sont supposées les mêmes que dans l'équation (9). D'un côté, ces valeurs sont admissibles dans la formule (8), puisque a et b sont premiers entre eux, ainsi que p et q (n° **7**); de l'autre elles transforment la formule (8) en la

formule (9). Ainsi, pour chaque valeur de z, la formule (8) donne tous les couples de valeurs premières entre elles de x et de y, qui forment avec cette valeur de z des solutions de l'équation (7).

On obtient aussi des solutions étrangères; car, dans le cas auquel se rapporte la formule (9), si l'on associait entre elles dans l'équation (8) les valeurs de a, b, p et q, déterminées par les deux formules

$$a + b\sqrt{-c} = (f + g\sqrt{-c})(a_1 + b_1\sqrt{-c})^{\alpha}(a_2 + b_2\sqrt{-c})^{\beta}\ldots$$
$$p + q\sqrt{-c} = (h + k\sqrt{-c})(a_1 - b_1\sqrt{-c})^{\alpha'}(a_2 + b_2\sqrt{-c})^{\beta'}\ldots,$$

on en déduirait pour x et y des valeurs divisibles par $a_1^2 + cb_1^2 = A_1$.

12. Les déterminants négatifs qui jouissent de la propriété supposée dans les derniers théorèmes III, IV et V sont -1, -2, -3, -4, -7; les valeurs de c auxquelles s'applique la méthode définie dans ces théorèmes sont donc 1, 2, 3, 4 et 7. Nous avons appliqué le théorème III dans un Mémoire sur l'équation $x^3 + y^3 = Az^3$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, juillet 1870), et nous avons indiqué le principe sur lequel repose la démonstration précédente. Dans le cas particulier où $c = 3$, les théorèmes précédents pourraient aussi se déduire de ce que tout nombre premier $6l + 1$ est le produit de deux facteurs complexes irréductibles formés au moyen des racines cubiques imaginaires de l'unité, conformément à la belle théorie des facteurs complexes donnée par M. Kummer.

Les nombres complexes $a + b\sqrt{-1}$, $a + b\sqrt{-2}$, $a + b\sqrt{-3}$, $a + b\sqrt{-4}$, $a + b\sqrt{-7}$ ne sont pas les seuls dont l'analyse indéterminée puisse tirer de grands avantages; on peut en introduire d'autres beaucoup plus nombreux, mais en apportant quelques modifications aux théorèmes qui en définissent l'usage légitime.

II. — Extension de la méthode précédente.

13. Désignons par n un nombre entier et positif, tel que toutes les formes quadratiques de déterminant $-n$ soient distribuées en divers genres, dont chacun ne renferme qu'une seule classe. Ces déterminants

sont assez nombreux : par exemple, si le nombre n a l'une des valeurs

$$5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 15,\ 16,\ 18,\ 22,\ 25,\ 28,\ 37,\ 58.$$

toutes les formes quadratiques de déterminant $-n$ se distribuent en deux classes et en deux genres, en sorte que chaque genre est représenté par une seule classe. De même, si n est égal à l'un des nombres

$$21,\ 24,\ 30,\ 33,\ 40,\ 42,\ 45,\ 48,\ 57,\ 60,\ 70,\ 72,\ 78$$
$$85,\ 88,\ 93,\ 102,\ 112,\ 130,\ 133,\ 177,\ 190.\ 232,\ 253,$$

les formes quadratiques de déterminant $-n$ sont comprises dans quatre genres dont chacun ne renferme qu'une seule classe. Il y a encore d'autres déterminants négatifs, pour lesquels le nombre des classes est le même que celui des genres; ils appartiennent aux classifications VIII, 1 et XVI, 1 des Tables publiées dans le second volume des *Œuvres de Gauss*.

Tous ces déterminants jouissent de cette propriété, qu'un diviseur impair quelconque A de la formule x^2+ny^2 ne peut être représenté par une forme quadratique de déterminant $-n$ qu'autant que cette forme appartient à la classe unique du genre déterminé par le reste de la division du nombre A, par l'un des modules $4n$ ou $8n$. Si l'on ne prend qu'une forme quadratique par classe, on énonce cette propriété en disant que toutes les représentations du nombre A par les diverses formes quadratiques de déterminant $-n$ appartiennent à la même forme.

14. Proposons-nous d'abord de trouver toutes les solutions de l'équation

$$(1)\qquad x^2+ny^2=z^{2m+1},$$

en nombres entiers, premiers entre eux deux à deux, et dont l'un, z, doit être en outre impair. Le théorème III est ici applicable; car, z étant impair, les deux nombres z^{2m+1} et z appartiennent au même genre, savoir le genre principal, puisque z^{2m+1} est représenté par la

forme principale. Cette forme $x^2 + ny^2$ donne donc toutes les représentations propres des deux nombres z^{2m+1} et z par le système des formes quadratiques choisies pour représenter les diverses classes de déterminant $-n$. Il est donc évident que, si l'on égale p et q de toutes les manières possibles à des nombres entiers et premiers entre eux, les formules

$$(2) \qquad \pm x = y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^{2m+1}, \quad p^2 + nq^2 = z$$

donnent pour z toutes les valeurs propres à vérifier l'équation proposée (1). Or, pour chaque valeur de z, la première de ces deux formules détermine pour x et y toutes les représentations propres de z^{2m+1} par la forme $x^2 + ny^2$. Pour le démontrer il nous suffit (9) de faire voir que, pour toute solution α de la congruence

$$\alpha^2 + n \equiv 0 \pmod{z},$$

notre formule donne pour x et y des valeurs premières entre elles, dont le rapport, désigné par u, vérifie la congruence $u \equiv \alpha \pmod{z}$. C'est ce qu'on obtient en multipliant les deux membres par $p - q\sqrt{-n}$. Posons

$$(p + q\sqrt{-n})^{2m} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-n};$$

le produit sera

$$\pm (px + cqy) \pm \sqrt{-n}\,(py - qx) = \mathrm{P}z + \mathrm{Q}z\sqrt{-n},$$

d'où

$$\frac{x}{y} \equiv \frac{p}{q} \pmod{z}.$$

Pour que la valeur u du rapport $\frac{x}{y}$ vérifie la condition $u \equiv \alpha \pmod{z}$, il suffit donc de prendre pour (p, q) l'une des deux représentations de z qui correspondent à la racine α et satisfont à la congruence

$$p \equiv \alpha q \pmod{z};$$

ce qui est toujours possible, puisque toutes les représentations de z pour le déterminant $-n$ sont de la forme $p^2 + nq^2$. Donc :

THÉORÈME VI. — *Si pour le déterminant $-n$ le genre principal ne renferme qu'une seule classe de formes quadratiques, toutes les solutions en nombres entiers et premiers entre eux de l'équation*

$$x^2 + ny^2 = z^{2m+1}, \tag{1}$$

dans laquelle z a une valeur impaire, se déduisent des équations

$$\pm x \pm y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^{2m+1}, \quad z = p^2 + nq^2, \tag{2}$$

en donnant aux lettres p et q de toutes les manières possibles des valeurs entières et premières entre elles.

Nous devons remarquer que, si le nombre n n'est pas de la forme $8l + 7$, et que l'exposant $2m + 1$ soit > 1, il est impossible de supposer x, y, z premiers entre eux, sans que u soit impair. Les équations (2) donnent alors toutes les solutions de l'équation (1) en nombres entiers et premiers entre eux; mais, si le nombre n est de la forme $8l + 7$, l'équation (1) admet des solutions où le nombre z est pair, x et y étant impairs et premiers, soit entre eux, soit relativement à z. Ces solutions devront être étudiées séparément, dans chaque problème où l'on aura besoin de connaître toutes les solutions de l'équation (1) en nombres entiers et premiers entre eux deux à deux.

15. Proposons-nous de trouver toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + ny^2 = z^{2m} = (z^2)^m \tag{3}$$

en nombres entiers et premiers entre eux deux à deux, dont le dernier, z, soit en outre impair. Quel que soit le genre auquel appartienne le nombre z, son carré z^2 sera du genre principal, et l'équation

$$p^2 + ny^2 = z^2 \tag{4}$$

aura autant de couples de solutions (p, q), $(-p, -q)$ qu'il y a de

racines de la congruence

$$\alpha^2 + n \equiv 0 \pmod{z^2}.$$

Or la formule

$$(5) \qquad \pm x \pm y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^m$$

détermine pour x et y des valeurs premières entre elles, dont le rapport est congru au rapport $p:q$ suivant le module $p^2 + nq^2$: on le démontre en multipliant les deux membres par le facteur $p - q\sqrt{-n}$, ce qui donne

$$\pm (px + nqy) \pm \sqrt{-n}(py - qx) = (p^2 + n^2q^2)(p + q\sqrt{-n})^{m-1},$$

d'où

$$py - qx = Q(p^2 + nq^2), \quad \frac{x}{y} \equiv \frac{p}{q} \pmod{p^2 + nq^2}.$$

Donc la formule (4) donne d'un côté toutes les valeurs de z^2 propres à vérifier l'équation (3) sous les conditions posées, et, pour chaque valeur de z^2, la formule (5) fait correspondre autant de couples de solutions $(x, y), (-x, -y)$ qu'il y a de racines de la congruence $\alpha^2 + n \equiv 0 \pmod{z^2}$, lorsqu'on égale successivement p et q aux diverses solutions propres de l'équation (4). La formule (5) donne ainsi toutes les représentations propres de $(z^2)^m$ par la forme $x^2 + ny^2$ (**8**), en sorte que toutes les solutions de l'équation (3) se déduisent de l'équation (5) en y donnant à p et à q, de toutes les manières possibles, des valeurs entières et premières entre elles, qui rendent la forme $p^2 + nq^2$ égale à des carrés impairs.

Or ces valeurs de p et de q peuvent s'exprimer d'une manière générale au moyen de deux nombres entiers indéterminés. Pour cela nous partagerons les solutions de l'équation (4) en deux groupes, dont le premier renfermera toutes les solutions où le nombre q est pair, et le second toutes celles où q est impair.

Si q est pair, nous posons $q = 2fg$, $n = ab$, et la décomposition de l'équation (4), mise sous la forme $(z + p)(z - p) = 4abf^2g^2$, donne

$$z + p = 2af^2, \quad z - p = 2bg^2,$$

d'où

$$(6)\qquad z = af^2 + bg^2,\quad p = af^2 - bg^2,\quad q = 2fg,\quad ab = n.$$

Si q est impair, nous posons $q = fg$, et nous déduisons de l'équation (4)

$$z + p = af^2,\quad z - p = bg^2,$$

d'où

$$(7)\qquad z = \frac{af^2 + bg^2}{2},\quad p = \frac{af^2 - bg^2}{2},\quad q = fg,\quad ab = n.$$

Comme, dans la formule (3), z et x sont premiers entre eux, z doit être premier avec n, ce qui exige que les deux facteurs a, b soient premiers entre eux dans les formules (6), qu'ils le soient également dans les formules (7) si n est impair, mais qu'ils aient 2 pour plus grand diviseur commun si n est pair. Enfin, pour que z soit impair dans les formules (7), il faut, puisque f et g sont impairs, que le produit ab soit de l'une des deux formes $8l$ ou $4l+1$. Ainsi :

Théorème VII. — *Pour trouver toutes les solutions entières et premières entre elles de l'équation*

$$(3)\qquad x^2 + ny^2 = z^{2m},$$

en supposant z impair, il faut d'abord chercher toutes les solutions de l'équation

$$(4)\qquad p^2 + ny^2 = z^2,$$

ou plutôt toutes les formules générales propres à les déterminer. Ces formules générales se déduisent des suivantes :

$$(6)\qquad z = af^2 + bg^2,\quad p = af^2 - bg^2,\quad q = 2fg,\quad ab = n,$$

$$(7)\qquad z = \frac{af^2 + bg^2}{2},\quad p = \frac{af^2 - bg^2}{2},\quad q = fg,\quad ab = n,$$

en prenant pour a et b toutes les décompositions du nombre n en deux facteurs premiers entre eux pour les formules (6) *et, pour les for-*

mules (7), *en deux facteurs premiers entre eux, si n est de la forme* $4l+1$, *en deux facteurs dont le plus grand diviseur commun soit* 2, *si* $n = 8l$. *Puis on obtiendra les valeurs de* x *et de* y, *au moyen de l'équation*

$$(5) \qquad \pm x \pm y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^m = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-n},$$

en remplaçant dans les fonctions entières P, Q *les indéterminées* p *et* q *par les fonctions quadratiques déduites des formules* (6) *et* (7).

16. Afin d'éclaircir cette méthode par un exemple, proposons-nous de trouver toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + 5y^2 = z^4,$$

en nombres entiers et premiers entre eux deux à deux. La valeur de z sera nécessairement impaire; car autrement x et y seraient tous deux impairs, et le premier membre de notre équation aurait la forme $8l+6$, ce qui est impossible pour un bicarré. Comme d'ailleurs 5 est l'une des valeurs de n auxquelles s'appliquent les derniers théorèmes, les valeurs premières entre elles de x, de y et de z seront déterminées par les deux équations

$$\pm x \pm y\sqrt{-5} = (p + q\sqrt{-5})^2, \quad p^2 + 5q^2 = z^2.$$

Toutes les solutions de la dernière équation sont exprimées en fonction de deux nouvelles indéterminées f, g, au moyen des formules

$$z = f^2 + 5g^2, \quad \pm p = f^2 - 5g^2, \quad q = 2fg,$$
$$z = \frac{f^2 + 5g^2}{2}, \quad \pm p = \frac{f^2 - 5g^2}{2}, \quad q = fg.$$

En substituant ces valeurs de p et de q dans les formules

$$x = p^2 - 5q^2, \quad y = 2pq,$$

on obtient, pour exprimer d'une manière générale toutes les solutions

cherchées, les deux systèmes de formules

$$x = f^4 - 30f^2g^2 + 25g^4, \quad y = 4fg(f^2 - 5g^2), \quad z = f^2 + 5g^2,$$

$$x = \frac{f^4 - 30f^2g^2 + 25g^4}{4}, \quad y = fg(f^2 - 5g^2), \quad z = \frac{f^2 + 5g^2}{2}.$$

Les nombres indéterminés f et g doivent être entiers et premiers entre eux; de plus, l'un d'eux doit être pair dans le premier groupe de formule, tandis qu'ils doivent être tous deux impairs dans le second.

Dans l'exemple que nous venons de choisir, la méthode de décomposition employée par Fermat et par Euler pouvait conduire au même résultat.

Mais nous donnerons dans la seconde Partie un grand nombre d'applications où la méthode de Fermat serait complétement impuissante.

17. On peut établir des théorèmes analogues aux précédents pour les nombres complexes $\sqrt{a}x + \sqrt{-c}y$, employés par Euler au Chapitre XII de la deuxième Partie de son Algèbre, pourvu que le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-ac$ soit égal au nombre des genres, comme cela a lieu quand le produit ac est l'un des déterminants composés mentionnés précédemment (13). Supposant donc cette condition remplie, proposons-nous de trouver toutes les solutions propres de l'équation

$$(1) \qquad ax^2 + cy^2 = z^m, \quad a > 1, \quad c > 1.$$

Théorème VIII. — *Si l'exposant m est pair, l'équation proposée n'admet aucune solution en nombres entiers et différents de zéro.*

Comme, par hypothèse, chaque genre de formes quadratiques de déterminant $-ac$ ne renferme qu'une seule classe, le genre principal sera représenté par la classe principale, et la classe représentée par la forme réduite $(a, 0, c)$ constituera un genre différent du genre principal. Il est donc impossible que cette forme $ax^2 + by^2$ devienne égale à un carré, puisque tout carré appartient nécessairement au genre principal.

18. Si m est impair, les deux nombres z et z^m appartiennent au même genre relativement au déterminant $-ac$; le second étant, par hypothèse, représenté par la forme $(a, 0, c)$, il en est de même du premier z, en sorte que l'équation

$$(2) \qquad ap^2 + cq^2 = z$$

donnera toutes les valeurs de z propres à vérifier l'équation (1), lorsqu'on égalera, de toutes les manières possibles, aux lettres p et q des valeurs entières et premières entre elles. Nous écarterons les solutions où z reçoit une valeur paire; dans le petit nombre de cas où ces solutions sont possibles, elles devront être étudiées séparément. Le nombre z étant impair, toutes les représentations propres de z^m par la forme $(a, 0, c)$ se déduisent de la formule

$$(3) \qquad \pm\sqrt{a}x \pm \sqrt{-c}y = (\sqrt{a}p + \sqrt{-c}q)^m,$$

en y égalant les indéterminées p et q à toutes les représentations propres de z par la même forme $(a, 0, c)$. En effet, d'après les principes rappelés précédemment (8 et 9), les diverses représentations de z^m par les diverses classes de formes quadratiques de déterminant $-ac$ correspondent deux à deux aux diverses solutions de la congruence

$$\alpha^2 + ac \equiv 0 \pmod{z^m};$$

d'ailleurs, z étant impair, les racines de cette congruence correspondent une à une aux racines de la congruence

$$\beta^2 + ac \equiv 0 \pmod{z};$$

nous aurons donc démontré que la formule (3) détermine toutes les représentations propres de z^m, si nous faisons voir qu'elle donne, pour chacune des racines β, des valeurs de x et de y qui satisfont à la congruence $x \equiv \beta y \pmod{z}$.

Nous démontrerons, du reste, que ces valeurs sont premières entre elles, et qu'ainsi elles forment des représentations propres de z^m par $(a, 0, c)$. Multiplions à cet effet les deux membres de l'équation (3)

par $\sqrt{a}p-\sqrt{-c}q$, ce qui donnera pour produit

$$\pm(apx+cqy)\pm\sqrt{-ac}(py-qx)=\left[(ap^2-cq^2)+\sqrt{-ac}\,2pq\right]^{\frac{m-1}{2}}z.$$

Comme l'exposant $\frac{m-1}{2}$ est entier, nous pouvons poser

$$(a)\qquad \left[(ap^2-cq^2)+\sqrt{-ac}\,2pq\right]^{\frac{m-1}{2}}=\mathrm{P}+\sqrt{-ac}\,\mathrm{Q},$$

en désignant par P et par Q deux fonctions entières de p et de q; et nous aurons les deux équations

$$(b)\qquad apx+cqy=\pm\mathrm{P}z,\quad py-qx=\pm\mathrm{Q}z;$$

d'où, ayant égard à l'équation $ap^2+cq^2=z$, nous déduirons

$$(c)\qquad x=\mp(\mathrm{P}p\mp cq\mathrm{Q}),\quad y=\pm(q\mathrm{P}\pm ap\mathrm{Q}).$$

D'abord la seconde des équations (b) montre que les valeurs de x et de y vérifieront la congruence $x\equiv\beta y$ (mod. z), si l'on choisit pour p et q celle des représentations de z qui correspond à la racine β de la congruence $\beta^2+ac\equiv 0$ (mod. z), puisque alors on aura

$$p\equiv\beta q\quad(\text{mod. } z).$$

De plus, ces valeurs de x et de y sont premières entre elles, pourvu que z soit premier avec le module $-ac$, ce qui a toujours lieu quand ac ne renferme pas de facteur carré impair. En effet on déduit de la formule (3)

$$\pm x=p\left[(ap^2)^{\frac{m-1}{2}}-\frac{m(m-1)}{1.2}(ap^2)^{\frac{m-3}{2}}(cq^2)\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(ap^2)^{\frac{m-5}{2}}(cq^2)^2+\ldots\right].$$

Si x et y avaient un diviseur premier commun θ, on voit par l'équation (1) que ce diviseur serait un facteur de z; on aurait donc

$$cq^2\equiv-ap^2\quad(\text{mod. } \theta).$$

La dernière équation se changerait donc en congruence suivant le

module θ par la substitution de cq^2 à $-ap^2$; donc

$$\pm x \equiv p(ap^2)^{\frac{m-1}{2}}\left[1 + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \ldots\right],$$

$$\pm x \equiv 2^{\frac{m-1}{2}} p(ap^2)^{\frac{m-1}{2}} \pmod{\theta};$$

θ serait donc diviseur commun de z et du produit ap. On déduirait de l'équation $ap^2 + cq^2 = z$, que θ diviserait aussi cq. D'ailleurs il ne divise ni a ni c, puisque l'on suppose z premier avec le produit ac; il devrait donc diviser en même temps p et q, contrairement à l'hypothèse.

Donc, pour toute valeur de z impaire et première avec le produit ac, l'équation (3) détermine pour x et y toutes les représentations propres de z^m par la forme $ax^2 + cy^2$, pourvu qu'on prenne pour p et q toutes les solutions propres de l'équation $ap^2 + cq^2 = z$. D'ailleurs la formule $ap^2 + cq^2 = z$ donne toutes les valeurs de z compatibles avec l'équation proposée. Toutes les solutions de cette équation se déduisent donc de la formule (3) jointe à la formule (2), en donnant aux lettres p et q, de toutes les manières possibles, des valeurs entières et premières entre elles. Donc :

THÉORÈME IX. — *Si l'exposant m est un nombre entier impair, les solutions de l'équation*

$$(1) \qquad ax^2 + cy^2 = z^m,$$

en nombres entiers et premiers entre eux, dont le dernier z doit être impair et premier avec le produit ac, sont exprimées d'une manière générale par les formules

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \pm x &= p\left[(ap^2)^{\frac{m-1}{2}} - \frac{m(m-1)}{1.2}(ap^2)^{\frac{m-3}{2}}(cq^2)\right.\\ &\qquad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(ap^2)^{\frac{m-5}{2}}(cq^2)^2 - \ldots\right],\\ \pm y &= q\left[m(ap^2)^{\frac{m-1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(ap^2)^{\frac{m-3}{2}}(cq^2)\right.\\ &\qquad \left. + \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2\ldots5}(ap^2)^{\frac{m-5}{2}}(cq^2)^2 - \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

$$(2) \qquad z = ap^2 + cq^2,$$

où l'on désigne par p et q deux nombres entiers et premiers entre eux.

19. Soit $m = 3$. La formule $2x^2 + 3y^2$ ne peut devenir égale à un cube pair ou multiple de 3, tant que les valeurs de x et de y sont des nombres entiers et premiers entre eux. D'ailleurs 6 est l'un des déterminants qui remplissent les conditions supposées dans le théorème précédent. Les solutions, en nombres entiers et premiers entre eux, de l'équation

$$2x^2 + 3y^2 = z^3$$

sont donc exprimées d'une manière générale par les formules

$$z = 2p^2 + 3q^2, \quad \pm x = p(2p^2 - 9q^2), \quad \pm y = q(6p^2 - 3q^2).$$

Aucun des deux nombres x ou y déterminés par ces formules ne devient égal à l'unité pour des valeurs de p et de q entières et premières entre elles. On peut donc énoncer ces deux théorèmes :

Il est impossible d'obtenir un cube en ajoutant 3 *unités au double d'un carré entier.*

Si l'on triple les carrés 1, 4, 9, 16,... *et qu'on ajoute* 2 *à chacun des produits, aucune des sommes obtenues n'est égale à un cube.*

20. Les formes quadratiques dont le déterminant est positif donnent lieu à des théorèmes analogues aux précédents, avec cette différence que, dans le second membre des équations complexes, auxquelles on a recours pour déterminer les solutions des équations proposées, on doit introduire un facteur complexe de l'unité déduit d'une solution de l'équation

$$t^2 - nu^2 = 1.$$

La présence de ce facteur rend plus difficile l'emploi des nombres complexes compris dans la formule $a + b\sqrt{n}$, où n désigne un nombre positif non carré, excepté les cas particuliers où l'on peut démontrer que le facteur complexe de l'unité doit se réduire à ± 1. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans l'application que Dirichlet a faite des nom-

bres $f + g\sqrt{5}$, pour démontrer l'impossibilité de l'équation de Fermat

$$x^5 + y^5 + z^5 = 0.$$

21. Je terminerai cette partie théorique de mon travail en rappelant quelques résultats analogues obtenus par Euler et par Legendre. Le premier reconnaît, dans la seconde Partie de son *Algèbre* (n^{os} **186**, **187**, **188**), que la formule $ax^2 + cy^2$ ne peut pas toujours se transformer en un carré, tandis qu'elle peut toujours se transformer en une puissance de degré impair quelconque; mais il ne dit rien qui puisse faire distinguer le cas où sa méthode peut faire connaître toutes les solutions du problème de ceux où elle n'en donne qu'une partie. De plus, la formule $ax^2 + cy^2$ peut aussi se transformer en des puissances de degré pair; il suffit, pour cela, qu'elle soit comprise dans le genre principal pour le déterminant $-ac$. Cela a lieu, évidemment, pour la formule $5x^2 + 11y^2$, qui devient égale à 16 quand on y fait $x = y = 1$, et à 49 quand on pose $x = 1$, $y = 2$.

Legendre, dans sa théorie de la multiplication des formes quadratiques (*Théorie des nombres*, IV, § 4 et 5), donne la solution d'un problème qui offre beaucoup d'analogie avec ceux dont nous nous sommes occupés. Il apprend à déterminer, quand cela est possible, une fonction x, homogène et du second degré, de deux variables arbitraires y et z, et deux autres fonctions homogènes des mêmes variables, Y, Z, du degré m, et propres à rendre l'équation

$$\text{(A)} \qquad LY^2 + MYZ + NZ^2 = bx^m,$$

identique par rapport aux variables arbitraires y et z. Il est évident que cette solution analytique de l'équation (A) donnera une infinité de solutions numériques, lorsqu'on attribuera des valeurs entières aux variables y et z. Mais il n'est pas évident qu'on obtienne, par ce moyen, tous les systèmes de nombres entiers et premiers entre eux Y, Z, x, propres à vérifier cette équation. C'est là une question importante dont Legendre ne s'est pas occupé. Nous sommes loin de l'avoir envisagée dans toute son étendue. Toutefois les théorèmes que nous venons d'établir apportent à l'Analyse indéterminée des ressources nouvelles, dont j'essayerai de faire connaître les avantages dans les applications qui formeront la deuxième Partie de ce Mémoire.

DEUXIÈME PARTIE.

I. — Sur l'équation $x^2 + cy^2 = z^3$.

22. Fermat rappelle, dans une Lettre au chevalier Digby, deux théorèmes qu'il avait communiqués à Frénicle : « Je lui avais écrit, dit-il, qu'il n'y a qu'un nombre carré entier qui, joint au binaire, fasse un cube, et que ledit carré est 25, auquel, si vous ajoutez 2, il se fait 27, qui est un cube. Il a peine à croire cette proposition négative, et la trouve trop hardie et trop générale. Mais, pour augmenter son étonnement, je dis que, si l'on cherche un carré qui, ajouté à 4, fasse un cube, il ne s'en trouvera jamais que deux en nombres entiers, savoir 4 et 121; car 4 ajouté à 4 fait 8, qui est un cube; et 121 ajouté à 4 fait 125, qui est aussi un cube; mais, après cela, toute l'infinité des nombres n'en saurait fournir un troisième qui ait la même propriété. »

Euler et Legendre ont démontré ces théorèmes à l'aide des nombres complexes $a + b\sqrt{-1}$, $a + b\sqrt{-2}$, sans se mettre en peine de justifier cet emploi. Leur démonstration est complétée par notre théorème III (9), où l'usage qu'ils ont fait de ces nombres complexes est démontré légitime. Nous retrouverons ces théorèmes de Fermat comme cas particuliers dans la solution d'une question plus générale dont nous allons nous occuper.

23. Désignons par n un nombre premier impair, et par c l'un des nombres 1, 2, 3, 4 ou 7, et proposons-nous de trouver toutes les solutions entières de l'équation

$$x^2 + cn^{2z} = z^3, \tag{1}$$

en nous bornant toutefois à celles où la valeur de z est impaire, quand $c = 7$. Nous partagerons ces solutions en deux groupes, dont l'un renfermera celles où les deux nombres x et n sont premiers entre eux, et l'autre celles où x est multiple de n. Quand $c = 1$, 2 ou 3, z est néces-

sairement impair, premier avec c, avec n et avec x, tant que les deux nombres x et n sont premiers entre eux; comme d'ailleurs le théorème III est applicable à ces valeurs de c, toutes les solutions du premier groupe sont données par les formules du n° 9, d'où l'on déduit

$$(2) \quad \pm x = p(p^2 - 3cq^2), \quad \pm n^\alpha = q(3p^2 - cq^2), \quad z = p^2 + cq^2.$$

Si $c = 4$, outre les solutions en nombres impairs déterminées par les formules (2), le premier groupe renferme aussi des solutions en nombres pairs non divisibles par n. Pour les trouver, posons $x = 2x_1$, $z = 2z_1$; l'équation (1) divisée par (4) devient

$$x_1^2 + n^{2\alpha} = 2z_1^3.$$

Or cette équation est résolue d'une manière générale par les formules

$$z_1 = f^2 + g^2, \quad \pm x_1 \pm n^\alpha \sqrt{-1} = (1 + \sqrt{-1})(f + g\sqrt{-1})^3,$$

dans lesquelles f et g sont des nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair. D'abord la formule $z_1 = f^2 + g^2$ donne toutes les valeurs convenables de z_1; ensuite pour chaque valeur particulière de z, on obtient toutes les représentations propres du produit $2z^3$ par la forme $x^2 + y^2$, au moyen de la formule

$$\pm x_1 \pm y\sqrt{-1} = (1 + \sqrt{-1})(f + g\sqrt{-1})^3,$$

en prenant pour f et g toutes les solutions propres de la formule $z_1 = f^2 + g^2$; car les valeurs de x_1 et de y sont impaires, et par conséquent leur rapport vérifie la congruence $u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$; de plus, comme f et g reçoivent des valeurs liées avec toutes les racines de la congruence $\beta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{z_1}$ par la relation $f - g\beta \equiv 0 \pmod{z_1}$, les divers systèmes de valeurs de x_1 et de y seront aussi liés respectivement par la relation semblable $x_1 \equiv \beta y \pmod{z_1}$ avec toutes les diverses racines de la congruence $\beta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{z_1}$; on le démontre comme au n° 9, en multipliant les deux membres de la formule par $f - g\sqrt{-1}$. Si l'on tient compte du double signe $\pm$ qu'on peut donner aux indéterminées, on a deux fois autant de représentations propres et diffé-

rentes entre elles du produit $2z^3$ qu'il y a de solutions de la congruence $\beta^2+1\equiv 0$ (mod. z_1); d'ailleurs le nombre des solutions de cette congruence est le même que celui des solutions de la congruence $n^2+1\equiv 0$ (mod. $2z_1^3$). Donc, à cause des principes rappelés au n° 8, notre formule donne toutes les représentations propres du produit $2z_1^3$, lorsqu'on y substitue successivement toutes les solutions propres de l'équation $z_1=f^2+g^2$. On en déduit les formules

$$\pm x_1=(f+g)(f^2-4fg+g^2),$$
$$\pm n^\alpha=(f-g)(f^2+4fg+g^2),\quad z_1=f^2+g^2,$$

dont la seconde permettra de déterminer les valeurs des deux nombres f et g, et par suite celles de x_1 et de z_1.

Comme f et g sont de parités différentes, si l'on pose $f+g=p$, $-g=q$, les deux nombres p et q seront impairs, et les formules précédentes deviendront

$$(3)\quad \pm 2x_1=\pm x=p(p^2-3q^2),\quad \pm 2n^\alpha=q(3p^2-q^2),\quad 2z_1=z=p^2+q^2.$$

Quand $c=7$, les solutions du premier groupe sont données par les formules (2) si le carré x^2 est pair, et par d'autres formules que nous omettrons si, le carré x^2 étant impair, le nombre z est pair.

Ainsi celles des solutions de l'équation (1), où les deux nombres x et n sont premiers entre eux, seront complétement déterminées par les formules (2), si c désigne l'un des trois nombres 1, 2 ou 3; elles seront déterminées par les formules (2) et (3) si c égale 4; enfin, si c égale 7, nous nous bornerons à chercher les solutions où le carré x^2 est pair; celles de ces solutions où x n'est pas multiple de n sont complétement déterminées par les formules (2).

24. Pour obtenir les solutions du second groupe, celles où x est multiple de n, posons $x=n^\beta\xi$, $z=n^\gamma\zeta$, en désignant par ξ et ζ deux nombres entiers divisibles par n. De plus, pour ne pas trop allonger la discussion, supposons n et c premiers entre eux. L'équation proposée (1) prend la forme

$$n^{2\beta}\xi^2+cn^{2\alpha}=n^{3\gamma}\zeta^3,$$

et elle n'est possible qu'autant que les deux plus petits des exposants 2α, 2β, 2γ sont égaux. Le cas où les trois exposants sont égaux se ramène à celui où $n=1$; car alors l'équation devient $\xi^2+c=\zeta^3$. Mais cela n'a lieu que si $\alpha=3\lambda$. Les solutions de cette forme se déduiront de celles de l'équation $\xi^2+c=\zeta^3$, qui sera résolue plus bas, en multipliant ξ par $n^{3\lambda}$, et ζ par $n^{2\lambda}$. Nous pouvons donc supposer que l'un des trois exposants 2α, 2β, 3γ est plus grand que les deux autres. Les solutions cherchées seront comprises dans les trois équations

$$(4)\qquad n^{2(\beta-\alpha)}\xi^2+c=\zeta^3,\quad \xi^2+cn^{2(\alpha-\beta)}=\zeta^3,\quad \xi^2+c=n^{3\gamma-2\alpha}\zeta^3.$$

La première suppose $\alpha=3\lambda$, puisque l'on a $2\alpha=3\gamma$. De plus elle rentre comme cas particulier dans l'équation $x^2+c=\zeta^3$, dont nous allons immédiatement nous occuper.

25. Si l'on suppose $n=1$, les deux nombres x et n seront nécessairement premiers entre eux, en sorte que toutes les solutions de l'équation (1) seront comprises dans le premier groupe, et se déduisent des formules (2) et (3), avec la restriction posée pour le cas où $c=7$. Quand $c=1$, 2 ou 3, toutes ces solutions sont données par les formules (2), dont la seconde exige qu'on fasse

$$q=\pm 1,\quad 3p^2=c\pm 1,\quad \pm x=p(p^2-3cq^2),$$

ce qui est impossible si $c=3$. Dans le cas où $c=1$, on doit faire $p=0$, $x=0$; et si $c=2$, on doit faire $q=\pm 1$, $p=\pm 1$, ce qui donne $\pm x=5$, $z=3$. Donc :

Théorème I. — *Dans toute la série des carrés* 1, 4, 9, 16, 25,..., *il n'en existe aucun qui devienne égal à un cube quand on l'augmente d'une unité.*

Théorème II. — *Le seul cube qu'on puisse obtenir en ajoutant* 2 *à un carré entier est* 27, *qu'on obtient en ajoutant* 2 *à* 25. (Fermat.)

Théorème III. — *Aucun cube n'est égal à un carré entier augmenté de trois unités.*

Soit $c=4$. Les solutions en nombres impairs sont déterminées par les formules (2), dont la seconde $q(3p^2-4q^2)=\pm 1$ n'admet que les solutions $p=\pm 1$, $q=\pm 1$, d'où l'on déduit $x=\pm 11$, $y=5$. Les

solutions en nombres pairs se déduisent des formules (3), dont la seconde $q(3p^2-q^2)=\pm 2$ n'admet, en nombres impairs, que les solutions $p=\pm 1$, $q=\pm 1$, auxquelles correspondent $x=\pm 2$, $z=2$. Donc :

THÉORÈME IV. — *Dans la suite indéfinie des carrés* 1, 4, 9, 16, 25,..., *il n'y en a que deux qui, ajoutés à* 4, *fassent des cubes; ces deux carrés sont* 4 *et* 121, *qui, ajoutés à* 4, *font respectivement les deux cubes* 8 *et* 125. (FERMAT.)

Soit $c=7$, et supposons x pair. Toutes les conditions du théorème III (9) se trouvant remplies, les solutions cherchées sont déterminées par les formules (2). La seconde $q(3p^2-7q^2)=\pm 1$ étant impossible, nous concluons :

THÉORÈME V. — *Dans la suite indéfinie des carrés pairs, il n'en est aucun qui, étant ajouté à* 7, *fasse un cube.*

26. Supposons $n>1$ et non diviseur de c. Si α est multiple de 3, outre les solutions où le nombre x est premier avec n, et qui seront déterminées par les formules (2) et (3), conformément à ce que nous avons vu au n° **25**, il y aura des solutions déduites de celles de l'équation $\xi^2+c=\zeta^3$, en posant $x=n^\alpha\xi$ et $z=n^{\frac{2\alpha}{3}}\zeta$. Il pourra de plus y avoir des solutions déterminées par la première des équations (4). Elle ne diffère de l'équation que nous venons de résoudre (5) qu'en ce que l'on doit avoir $x=n^{\alpha-\beta}\zeta$. Comme n doit être impair, elle est impossible si $c=1$, 2 ou 3; elle n'est possible qu'en supposant $\alpha=\beta+1$, et $n=5$ ou 11, si $c=4$. Enfin, quand $c=7$ et qu'on exige que la valeur de x soit paire, il n'y a aucune solution de ce genre.

Dans la suite, nous supposerons que l'exposant α est de l'une des deux formes $3l+1$, $3l+2$, en sorte que toutes les solutions du second groupe se déduiront respectivement de celles des deux équations

$$\xi^2+cn^{2(\alpha-3l)}=\zeta^3, \tag{5}$$

$$\xi^2+c=n^{3\gamma-2\alpha}\zeta^3, \tag{6}$$

en faisant $x=n^{3l}\xi$, $z=n^{2l}\zeta$ pour la première, et $x=n^\alpha\xi$, $z=n^\gamma\zeta$

pour la seconde. D'ailleurs la première suppose $\alpha > 3\lambda$; il n'y a donc pas lieu de la considérer si $\alpha = 1$ ou 2. La seconde suppose que le nombre premier n soit lui-même de la forme $x^2 + cy^2$.

Nous réduirons donc les solutions de l'équation (1) aux seules solutions du premier groupe, si, supposant $\alpha = 1$ ou 2, nous désignons par n un nombre premier impair non diviseur de la formule $x^2 + c$, et premier avec c. C'est ce que nous allons faire successivement pour les diverses valeurs de c.

27. Supposons que dans l'équation (1) on ait $c = 1$, $\alpha = 1$ ou 2, et que n soit un nombre premier $4l + 3$. Le nombre n sera non diviseur de la formule $x^2 + 1$, en sorte que (**26**) toutes les solutions cherchées devront se déduire des formules (2). La seconde de ces formules

$$\pm n^\alpha = q(3p^2 - q^2)$$

ne peut être vérifiée en nombres premiers entre eux qu'en posant

$$(a) \qquad q = \pm n^\alpha, \quad 3p^2 = n^{2\alpha} - 1,$$

ou

$$(b) \qquad q = \pm 1, \quad 3p^2 = 1 + n^\alpha.$$

Prenons d'abord $\alpha = 1$. Les équations (b) ne sont possibles qu'autant que le nombre n est de l'une des formes $9l + 2$ ou $27l - 1$. Il faut, en outre, que le quotient $\frac{n+1}{3}$ soit un carré p^2. Les valeurs de n qui vérifient la dernière condition se déduiront de la formule $n = 3p^2 - 1$, en donnant à p des valeurs paires 2, 4, 6,..., et en rejetant tous les résultats qui ne sont pas des nombres premiers. En faisant $p = 2, 4, 6, 8, 12, 14, \ldots$, on trouve les nombres premiers 11, 47, 107, 191, 431, 487,....

La solution (a) dépend de l'équation $3p^2 = n^2 - 1$. Posons $p = 2fg$; nous obtiendrons par décomposition

$$n \pm 1 = 2f^2, \qquad n \mp 1 = 6g^2,$$
$$n = f^2 + 3g^2, \quad f^2 - 3g^2 = 1.$$

Le signe choisi dans la dernière équation est commandé par ce fait, que -1 n'est pas résidu quadratique de 3. La première conséquence de ces formules est que le nombre n doit être de la forme $6l+1$ pour que la solution (a) puisse exister. Mais cette condition n'est pas suffisante; car toutes les valeurs positives de f et de g propres à vérifier l'équation $f^2 - 3g^2 = 1$ se déduisent de la formule

$$f + g\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^m,$$

en donnant à l'exposant m des valeurs entières et positives. En élevant au carré les deux nombres de cette équation, on trouve

$$f^2 + 3g^2 + 2fg\sqrt{3} = n + p\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{2m},$$

et l'on en déduit

$$(8)\quad \begin{cases} n = 7^m + \dfrac{m(m-1)}{1.2}7^{m-2}4^2 3 + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}7^{m-4}4^4 3^2 + \ldots, \\ p = m7^{m-1}4 + \dfrac{m(m+1)(m-2)}{1.2.3}7^{m-3}4^3 3 \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2\ldots5}7^{m-5}4^5 3^2 + \ldots. \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas où $\alpha = 1$, aucune des solutions (a) ou (b) n'est possible si le nombre n n'est pas de l'une des trois formes $6l+1$, $9l+2$, $17l-1$. La solution (b) est seule possible si le nombre n est de l'une des formes $9l+2$, $27l-1$. Au contraire la solution (a) est seule possible si n est de la forme $6l+1$.

28. Or les nombres premiers $4l+3$, qui ne sont d'aucune des formes $6l+1$, $9l+2$, $27l-1$, sont le nombre 3 et les nombres premiers renfermés dans les cinq formules $108l + (23, 35, 59, 71, 95)$. Nous avons ainsi deux théorèmes analogues à ceux de Fermat.

Théorème VI. — *Aucun carré entier, ajouté à* 9, *ne fait un cube.*

Théorème VII. — *Si l'on désigne par* n *l'un des nombres premiers compris dans les formules* $108l + (23, 35, 59, 71, 95)$, *tels que* 23,

59, 71, 131, 167,..., *il est impossible d'obtenir un cube en ajoutant un carré entier au carré du nombre n.*

Si le nombre n est de la forme $36l + 11$, la solution (b) est la seule possible, et elle exige que n soit de la forme $12k^2 - 1$. Or, au-dessous de 1000, les seuls nombres premiers compris en même temps dans les deux formules $36l + 11$, $12k^2 - 1$ sont 11, 47, 191, 587, qui correspondent aux valeurs 1, 2, 4 et 7 de k. Pour tous les autres nombres premiers $36l + 11$, inférieurs à 1000, l'équation $x^2 + n^2 = z^3$ est impossible en nombres entiers. Ces nombres premiers sont 83, 263, 407, 443, 479, 659, 839, 911, 947, au sujet desquels nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si l'on désigne par n l'un des nombres premiers* 83, 263, 407, 443, 479, 659, 839, 911, 947, *il est impossible de trouver un carré entier qui fasse un cube, lorsqu'on l'ajoute au carré* n^2.

Si n est l'un des nombres 11, 47, 191, 587, l'équation $x^2 + n^2 = z^3$ n'admet, en nombres entiers et positifs, qu'une seule solution déterminée par les formules (2) et (b) : $x = 2k(4k^2 - 3)$, $z = 1 + 4k^2$, $n = 12k^2 - 1$. Les solutions correspondantes sont : $x = 2$, $z = 5$, $n = 11$; $x = 52$, $z = 17$, $n = 47$; $x = 488$, $z = 65$, $n = 191$; $x = 2702$, $z = 197$, $n = 587$. Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

Théorème IX. — *Dans toute la série des carrés entiers* 1, 4, 9, 16,..., *il n'y en a qu'un seul qui, ajouté à* 121, *forme un cube : ce carré est* 4, *qui fait le cube* 125, *quand on l'ajoute à* 121.

Théorème X. — *Si l'on cherche à former un cube en ajoutant un carré entier au carré* 2209, *on n'y parviendra que d'une seule manière, savoir en ajoutant le carré* 2704, *ce qui fait* 4913, *cube de* 17.

Théorème XI. — *La seule manière d'obtenir un cube en ajoutant un carré entier au nombre* 36 481 *est d'ajouter le carré* 238 144, *ce qui fait* 274 625, *cube de* 65.

Théorème XII. — *Le seul cube que l'on obtienne en ajoutant un carré entier au carré de* 587 *est le cube de* 197.

Les nombres renfermés dans la formule $27l - 1$ donneraient des théorèmes analogues, car les seuls de ces nombres qui soient en même

temps de la forme $12k^2-1$ sont, au-dessous de 1000, 107, 431, 971. Le carré de chacun de ces trois nombres ne fait qu'un seul cube quand on lui ajoute successivement tous les carrés entiers. Les racines de ce carré et de ce cube se déduisent des formules (2) et (6), comme nous l'avons fait dans le cas précédent. Les autres nombres premiers compris dans la formule $27l-1$ et inférieurs à 1000, savoir 53, 269, 539, 593, 647, 701, 809, 863, donnent lieu à un théorème semblable au théorème VIII.

29. Si le nombre premier n est de la forme $12l+7$, l'équation $x^2+n^2=z^3$ n'admet pas de solution en nombres entiers, à moins que le nombre n ne vérifie la première des formules (8), pour une valeur convenablement choisie de l'exposant m. Dans ce cas les solutions sont données par les formules

$$\pm x = p(p^2-3n^2),\quad z=p^2+n^2,$$

où les valeurs de p et de n doivent vérifier les formules (8) pour une même valeur de l'exposant m. En faisant $m=1, 2, 3$, on trouve

$$n = 7,\ 97,\ 1351.$$

Laissant de côté 97, qui est de la forme $12l+1$, nous concluons de ce résultat que, pour tout nombre premier $12l+7$, inférieur à 1350 et différent de 7, l'équation $x^2+n^2=z^3$ est impossible. A la valeur $n=7$ correspond la solution $x=524$, $z=65$. Donc :

THÉORÈME XIII. — *Si l'on désigne par n l'un des nombres premiers $12l+7$, inférieur à 1350 et différent de 7, tels que 19, 31, 43, 67, 79, 103, 127,..., il est impossible de faire un cube en ajoutant un carré entier au carré n^2.*

THÉORÈME XIV. — *Dans toute la série des carrés entiers, le carré 274 579 est le seul qui, ajouté à 49, fasse un cube.*

30. Soit $\alpha=2$. L'équation $3p^2=1+n^2$ (27) est impossible, en sorte que l'équation (1) n'admet pas d'autre solution entière que celle qui est déterminée par les équations (a) $q=\pm n^2$, $3p^2=n^4-1$. En posant comme précédemment $p=2fg$, on trouve par décomposition

$$n^2+1=2f^2,\quad n^2-1=6g^2,\quad n^2=f^2+3g^2,\quad f^2-3g^2=1.$$

Le nombre n doit donc être de la forme $6l+1$; il sera donc de la forme $12l+7$, puisqu'il doit être en même temps de la forme $4x+3$. De plus son carré doit vérifier l'équation

$$n^2 = 7^m + \frac{m(m-1)}{1.2} 7^{m-2} 4^2 3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} 7^{m-4} 4^4 3^2 + \ldots.$$

Comme les carrés ne peuvent correspondre qu'aux valeurs paires de m, on peut employer la formule suivante, où p désigne un nombre entier quelconque :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} n^2 = (97)^p &+ \frac{p(p-1)}{1.2} (97)^{p-2} (56)^2 3 \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4} (97)^{p-4} (56)^4 3^2 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît aisément que les trois premières valeurs de cette formule ne sont pas des carrés; qu'à partir de la quatrième la valeur de n serait supérieure à 20000. L'équation $x^2 + n^4 = z^3$ n'admet donc pas de solution entière quand n désigne un nombre premier compris dans la formule $12l+7$ et inférieur à 20000.

Théorème XV. — *Si l'on désigne par n un nombre premier $12l+7$, inférieur à 20000, tel que 19, 31, 43, 67, 79, 103,..., on ne trouvera aucun carré entier qui, ajouté au bicarré n^4, fasse un cube.*

31. Quand $n=3$, les équations (a) et (b) sont évidemment impossibles; mais si l'on suppose en même temps $\alpha = 2$, l'équation

$$\pm 3^2 = q(3p^2 - q^2)$$

peut se décomposer d'une troisième manière, sans qu'il soit nécessaire que p et q aient un facteur commun; on peut poser

$$q = \pm 3, \quad 3p^2 - 9 = 3, \quad p = \pm 2, \quad x = 46, \quad z = 13.$$

Théorème XVI. — *Dans toute la série des carrés entiers, 2116 est le seul qui fasse un cube, lorsqu'on l'ajoute au carré 81.*

32. Soit $c=2$; les non-diviseurs de la formule $x^2 + 2y^2$ son

$8l + 5$ et $8l + 7$. Nous supposerons que n est un nombre premier de l'une de ces deux formes, et que $\alpha = 1$ ou 2, en sorte que toutes les solutions entières de l'équation $x^2 + n^{2\alpha} = z^3$ se déduiront (26) des seules formules (2), qui deviennent, dans notre cas,

$$(2)\quad \pm x = p(p^2 - 6q^2), \quad \pm n^\alpha = q(3p^2 - 2q^2), \quad z = p^2 + 2q^2.$$

La seconde se décompose de l'une des deux manières suivantes :

$$(a)\qquad q = \pm n^\alpha, \quad 3p^2 = 2n^{2\alpha} + 1,$$

$$(b)\qquad q = \pm 1, \quad 3p^2 = 2 + n^\alpha.$$

Toutes les valeurs de p et de n propres à vérifier les équations (a) sont données par les formules (**11**)

$$p = f^2 + 2g^2, \quad \pm 1 \pm n^\alpha\sqrt{-2} = (1 + \sqrt{-2})(f + g\sqrt{-2})^2.$$

Les nombres f et g devront vérifier la condition $f^2 - 2g^2 - 4fg = 1$; on aura ensuite $\pm n^\alpha = f^2 - 2g^2 + 2fg = (f + g)^2 - 3g^2$. On conclut de cette formule que le nombre n doit être résidu ou non-résidu quadratique de 3, suivant qu'il est de la forme $8l + 5$ ou de la forme $8l + 7$. Le nombre n doit donc être de l'une des deux formes $24l + 13$ ou $24l + 23$. Si donc le nombre n est de l'une des deux formes $24l + 5$ ou $24l + 7$, l'équation $3p^2 = 2n^{2\alpha} + 1$ est impossible, et l'équation proposée n'admet pas d'autre solution entière que celle qui est déterminée par les équations (b).

Si l'on suppose de plus $\alpha = 1$, le nombre n devra vérifier l'équation $n = 3p^2 - 2$ pour une valeur entière de p; en sorte que l'on aura

$$p = 2\lambda + 1, \quad n = 12\lambda(\lambda + 1) + 1.$$

Le nombre n sera donc nécessairement de la forme $24l + 1$. Donc :

THÉORÈME XVII. — *Il est impossible de former un cube en ajoutant un carré entier au double du carré d'un nombre premier $24l + 5$ ou $24l + 7$.*

55. Soit $\alpha = 2$, et continuons à supposer que le nombre premier

n est de l'une des deux formes $24l + (5, 7)$. L'équation $x^2 + 2n^4 = z^3$, quand elle n'est pas impossible en nombres entiers, n'admet qu'une seule solution, déterminée par les équations (b), dont la seconde $3p^2 = n^2 + 2$ est résolue d'une manière générale (**11**) par les formules

$$p = f^2 + 2g^2, \quad \pm n \pm \sqrt{-2} = (1 + \sqrt{-2})(f + g\sqrt{-2})^2,$$
$$\pm n = 6fg - 1, \quad (f + g)^3 - 3g^2 = 1.$$

Les solutions de la dernière équation, en se bornant à celles où f est positif, sont données par la formule

$$f + g \pm g\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^m.$$

Pour chaque valeur entière de l'exposant m, on obtient deux valeurs de n, en prenant alternativement la valeur positive et la valeur négative de g. Les plus petites valeurs de n sont 5, 19, 71, 265, 987, 2291, 3691, dont trois, 265, 987, 2291, sont des nombres composés, et trois autres, 19, 71, 3691, ne sont compris dans aucune des deux formes $24l + (5, 7)$. Donc :

Théorème XVIII. — *Si l'on désigne par n un nombre premier inférieur à* 3690, *compris dans l'une des deux formules* $24l + 5$, $24l + 7$, *sans être égal à* 5, *tel que* 7, 29, 53, 101, 103, 127, 149,..., *on ne pourra former aucun cube en ajoutant un carré entier au double du bicarré* n^4.

Quand $n = 5$, l'équation proposée n'admet que la solution $x = 9$, $z = 11$. On a donc ce théorème :

Théorème XIX. — *En ajoutant* 1250 *au carré* 81 *on obtient un cube,* 1331; *mais il n'existe aucun carré entier, autre que* 81, *qui fasse un cube lorsqu'on lui ajoute* 1250.

34. Soit $c = 3$. Nous désignerons par n un nombre premier $6l + 5$, en sorte que, n étant non-diviseur de la formule $x^2 + 3y^2$, toutes les solutions entières de l'équation $x^2 + 3n^{2\alpha} = z^3$ seront exprimées par les formules (2), pourvu que l'exposant α ne surpasse pas 2. Or la

seconde de ces formules

$$\pm n^{\alpha} = q(3p^2 - 3q^2)$$

est évidemment impossible si n est différent de 3. Donc :

THÉORÈME XX. — *Si aux carrés entiers* 1, 4, 9, 16,... *on ajoute trois fois le carré ou le bicarré d'un nombre premier* $6l + 5$, *aucune des sommes n'est égale à un cube.*

35. La formule $x^2 + cy^2 = z^3$ donne, pour les valeurs de c auxquelles s'appliquent les théorèmes VI et VII de la première Partie, des théorèmes semblables à ceux que nous venons de démontrer. Nous nous bornerons à un petit nombre d'exemples.

1° Soit $c = 5$. Désignons par n un nombre premier de l'une des formes $20l + (11, 13, 17, 19)$ et cherchons toutes les solutions entières de l'équation

$$(1) \qquad x^2 + 5.n^{2\alpha} = z^3,$$

en y supposant $\alpha = 1$ ou 2. Le nombre z sera nécessairement impair, puisque son cube doit être de l'une des trois formes $8l + (1, 5, 6)$, dont la dernière, la seule qui soit paire, ne peut aucunement convenir à un cube. De plus, x et z sont premiers entre eux; car, s'ils avaient un diviseur commun, ce serait une puissance de n. Posons $x = n^{\beta}\xi$, $z = n^{\gamma}\zeta$; comme α est < 3, l'équation (1) se ramène à la suivante :

$$\xi^2 + 5 = n^{3\gamma - 2\alpha}\zeta^3,$$

dans laquelle la différence 3γ et 2α ne peut pas se réduire à zéro. Cette équation est évidemment impossible, puisque n est non-diviseur de la formule $x^2 + 5$. Donc, dans toutes les solutions entières de l'équation proposée, z est impair et premier avec chacun des deux nombres x et n. Ces solutions (**14**) seront donc déterminées par les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} \pm x \pm n^{\alpha}\sqrt{-5} = (p + q\sqrt{-5})^3, \quad z = p^2 + 5q^2, \\ \pm x = p(p^2 - 15q^2), \quad \pm n^{\alpha} = q(3p^2 - 5q^2). \end{cases}$$

Or la dernière se décompose de l'une des deux manières suivantes :

$$(a) \qquad q = \pm n^2, \quad 3p^2 = 5q^2 \pm 1,$$

$$(b) \qquad q = \pm 1, \quad 3p^2 = 5q^2 \pm n^2.$$

La première (a) est toujours impossible, parce qu'on en déduirait que 3 est résidu quadratique de 5. La seconde est impossible pour la même raison, si α est pair, ou si n est de l'une des formes $20l + 11$, $20l + 19$. Donc :

Théorème XXI. — *Il est impossible de faire un cube en ajoutant à un carré entier 5 fois le bicarré d'un nombre premier* $20l + (11, 13, 17, 19)$ *ou 5 fois le carré d'un nombre premier* $20l + (11, 19)$.

Si $\alpha = 1$, et que le nombre premier n soit compris dans l'une des deux formules $20l + (13, 17)$, il y a lieu d'examiner si l'équation

$$3p^2 = 5 \pm n$$

est possible. Comme le nombre n est > 5, il faut prendre le signe supérieur. Posant donc $p = 2\lambda$, on aura $n = 12\lambda^2 - 5$. Cette valeur de n est nécessairement de la forme $4x + 3$, ce qui ne peut s'accorder avec aucune des deux formes supposées $20l + (13, 17)$. Donc :

Théorème XXII. — *Qu'on ajoute les carrés entiers* $1, 4, 9, 16, \ldots$, *successivement à 5 fois le carré d'un nombre premier* $20l + 13$, *ou* $20l + 17$, *aucune des sommes ne sera un cube.*

Si l'on suppose $n = 1$, les trois nombres x, n, z seront nécessairement premiers entre eux deux à deux ; de plus z ne peut être qu'un nombre impair. Les solutions de l'équation (1) seront donc encore exprimées par les formules (2), dont la seconde conduit à l'équation $3p^2 = 5 \pm 1$, qui est évidemment impossible. Donc :

Théorème XXIII. — *Il est impossible de faire un cube en ajoutant 5 unités à un carré entier.*

36. On peut aussi remplacer le nombre premier n par un nombre composé, pourvu que ce nombre ne soit divisible par aucun cube ou par aucun nombre premier diviseur de la formule $x^2 + cy^2$; alors, en effet, les nombres x, n, z seront nécessairement premiers entre eux

deux à deux dans la formule $x^2+cn^2=z^3$. Si, de plus, on ne considère que des valeurs de c qui ne soient pas de l'une des formes $4l$ ou $8l+7$, la valeur de z sera nécessairement impaire, en sorte que toutes les solutions cherchées seront exprimées par les formules (2) du n° 25. La seconde,

$$\pm n = q(3p^2 - cq^2),$$

n'admettra qu'un nombre limité de solutions, et donnera lieu à des théorèmes analogues aux précédents. Si le nombre n est multiple de 3 sans l'être de 9, si, de plus, il est premier avec c, il n'est pas nécessaire d'exiger qu'il ne soit divisible par aucun cube. L'équation proposée n'admet alors aucune solution. D'abord elle ne peut pas en admettre en nombres premiers entre eux, puisque ces solutions sont données par les formules (2), dont la seconde $\pm n = q(3p^2 - cq^2)$ est évidemment impossible quand n est divisible par 3 sans l'être par 9. Les solutions où les deux nombres n et x ne sont pas premiers entre eux doivent se déduire de solutions en nombres premiers entre eux d'équations toutes semblables. En effet, soit θ le plus grand diviseur commun des deux nombres n et x; posons $x=\theta u$, $n=\theta m$; l'équation proposée se ramène à la suivante $u^2+cm^2=\frac{z^3}{\theta^2}$, où les deux nombres u et m sont premiers entre eux. D'ailleurs, comme θ ne renferme aucun diviseur de la formule x^2+cy^2, le quotient $\frac{z^3}{\theta^2}$ doit être premier avec θ, ce qui exige que θ soit un cube. Le nombre θ ne sera donc pas divisible par 3. Les solutions de l'équation proposée, dans lesquelles x et n ont un diviseur commun, se ramènent donc aux solutions en nombres premiers entre eux d'équations semblables $u^2+cm^2=v^3$, où m remplit les mêmes conditions que n. Ces solutions n'existent donc pas. Pour chacune des valeurs convenables de c, on pourra énoncer un théorème analogue aux deux suivants :

Théorème XXIV. — *Si le nombre n est multiple de 3, sans être divisible ni par 9, ni par aucun facteur premier $4l+1$, on ne peut former aucun cube en ajoutant un carré entier au carré n^2.*

Théorème XXV. — *Si le nombre n est multiple de 3, sans être divisible ni par 9, ni par 5, ni par un nombre premier de l'une des*

formes $20l + (1, 3, 7, 9)$, *aucune des sommes obtenues en ajoutant un carré entier au carré* n^2, *multiplié par* 5, *n'est égale à un cube.*

37. Avant de passer à d'autres applications, nous devons faire connaître pour quelle raison nous avons dû écarter le cas où le nombre n aurait comme facteur quelque diviseur de la formule $x^2 + cy^2$. Soit n un diviseur premier de cette formule. L'équation $x^2 + cn^{2\alpha} = z^3$ peut admettre des solutions de la forme $x = n^\beta u$, $z = n^\gamma v$, qui se déduiront des solutions en nombres entiers et premiers entre eux de l'équation

$$(5) \qquad u^2 + c = n^\lambda . v^3.$$

Celles-ci se déduiront des formules

$$v = p^2 + cq^2, \quad \pm u \pm \sqrt{-c} = (a + b\sqrt{-c})(p + q\sqrt{-c})^3,$$

où

$$a^2 + b^2 c = n^\lambda.$$

Il y aura autant de solutions que de manières différentes de vérifier en nombres entiers p et q l'équation

$$bp(p^2 - 3cq^2) + aq(3p^2 - cq^2) = \pm 1.$$

Or, si le premier membre de cette équation est un polynôme irréductible, il n'existe aucune méthode pour décider si elle est possible oui ou non. On peut trouver toutes les solutions où les nombres p et q ne surpassent pas une limite donnée; mais on ne peut pas affirmer qu'il n'y aura pas d'autres solutions au delà de cette limite.

II. — Impossibilité de quelques équations de la forme $x^3 + y^3 = az^3$.

38. Dans notre Mémoire sur la décomposition d'un nombre entier A en une somme de deux cubes rationnels, nous avons considéré le cas où le nombre A ne contient aucun facteur de la forme $6l + 1$.

La méthode que nous avons employée n'est qu'une application de

notre théorème III; nous nous sommes contenté alors d'indiquer la démonstration que nous avons développée dans le présent Mémoire. Le théorème V (11) nous permet d'étendre ces recherches aux cas où le nombre donné renferme quelque facteur premier de la forme $6l+1$. Un petit nombre d'exemples suffiront pour faire connaître la méthode à suivre dans ces cas. Comme, dans ces exemples, le nombre donné a n'est divisible par aucun cube, nous pourrons admettre que les trois indéterminées x, y, z sont premières entre elles deux à deux; de plus nous supposerons que, dans la solution considérée, la valeur de z est la plus petite possible, de telle sorte que nous devons rejeter comme impossible toute hypothèse dans laquelle l'équation proposée serait vérifiée, en égalant les indéterminées à des diviseurs de z.

Exemple I.

$$(1) \qquad x^3+y^3=14.z^3.$$

D'abord le nombre z doit être multiple de 3; car autrement l'équation proposée donnerait, suivant le module 9, l'une des deux congruences également impossibles

$$\pm 1 \pm 1 \equiv \pm 5, \quad \pm 1 \equiv \pm 5 \quad (\text{mod. } 9).$$

On aura donc l'une des deux décompositions suivantes :

$$(a) \qquad x+y=14.9u^3, \quad \left(\frac{x-y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2=v^3,$$

$$(b) \qquad x+y=\ \ 2.9u^3, \quad \left(\frac{x-y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2=7v^3.$$

Dans le premier cas, on conclut du théorème III que l'on a

$$\frac{x-y}{2}+\sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6}=(f+\sqrt{-3}.g)^3$$
$$=f(f^2-9g^2)+\sqrt{-3}.3g(f^2-g^2);$$

d'où

$$\frac{x+y}{6}=7.3u^3=3g(f^2-g^2), \quad 7u^3=g(f^2-g^2).$$

Les trois facteurs $g, f+g, f-g$ étant premiers entre eux, la dernière équation se décomposera de l'une des manières suivantes :

$$7\alpha^3 = g, \quad f+g = \beta^3, \quad f-g = \gamma^3,$$
$$\alpha^3 = g, \quad f \pm g = 7\beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3;$$

La première décomposition doit être rejetée, parce qu'on en déduit l'équation

$$\beta^3 + (-\gamma)^3 = 14\alpha^3,$$

qui n'est autre que l'équation (1), vérifiée en égalant les indéterminées à des diviseurs de z. La seconde donne l'équation

$$7\beta^3 - \gamma^3 = \pm 2\alpha^3,$$

d'où l'on conclurait que 2 est résidu cubique de 7, ce qui est faux.

Le système des équations (a) est donc inadmissible.

Le théorème V nous apprend que la seconde des équations (b) est résolue de la manière la plus complète au moyen de la formule

$$\frac{x-y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6} = (2 \pm \sqrt{-3})(f + g\sqrt{-3})^3,$$

pourvu qu'on attribue aux nombres f et g toutes les valeurs entières et premières entre elles, l'une paire et l'autre impaire; en outre la formule

$$v = f^2 + 3g^2$$

exige que le nombre f soit premier relativement à 3.

Dans cet exemple et dans les suivants, nous poserons pour abréger

$$f(f^2 - 9g^2) = \mathrm{F}, \quad 3g(f^2 - g^2) = \mathrm{G},$$

et nous remarquerons, une fois pour toutes, que l'on a

$$\mathrm{F} \equiv \pm 1 \pmod{9}, \quad \mathrm{G} \equiv 0 \pmod{9}.$$

La formule précédente deviendra donc

$$\frac{x-y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6} = (2\mathrm{F} \mp 3\mathrm{G}) + \sqrt{-3}(2\mathrm{G} \pm \mathrm{F}),$$

et l'on en déduira

$$\frac{x+y}{6} = 3u^3 = 2G \pm F,$$

ce qui est impossible, puisque G est multiple de 3, tandis que le nombre F ne l'est pas; donc les équations (b) sont impossibles. Donc :

THÉORÈME XXVI. — *Le nombre* 14 *n'est pas décomposable en une somme de deux cubes rationnels.*

Exemple II.

$$(2) \qquad x^3 + y^3 = 21.z^3.$$

39. La somme de deux cubes ne pouvant être divisible par 3 sans l'être par 9, il faut que le nombre z soit multiple de 3.

La décomposition de l'équation (2) donnera donc l'un des systèmes suivants :

$$(a) \qquad x + y = 7.27u^3, \quad x^2 - xy + y^2 = 3v^3,$$

$$(b) \qquad x + y = 27u^3, \quad x^2 - xy + y^2 = 21.v^3.$$

Suivant que le nombre u sera pair ou impair, la seconde équation (a) se mettra sous l'une des formes

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2 = v^3 = F^2 + 3G^2,$$

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2x-y}{6}\right)^2 = v^3 = F^2 + 3G^2;$$

de la première on déduit

$$\frac{x+y}{6} = \frac{9.7u^3}{2} = G = 3g(f^2 - g^2),$$

$$3.7u^3 = 2g(f^2 - g^2).$$

Le second membre étant composé de trois facteurs premiers entre eux, $2g, f+g, f-g$, le produit $3.7u^3$ doit aussi se décomposer en

facteurs premiers entre eux. Or on ne peut faire que deux hypothèses : ou bien l'un de ces facteurs est multiple de 3.7, ou bien l'un est multiple de 3 et un autre est multiple de 7. Dans le premier cas, on trouve l'équation (2) vérifiée en attribuant aux indéterminées des valeurs égales à des diviseurs de z, ce qui est impossible. Dans le second, on est ramené à la solution d'une équation de la forme

$$\alpha^3 + 3\beta^3 + 7\gamma^3 = 0,$$

dans laquelle α et β sont premiers à 7. On en conclurait que 3 est résidu cubique de 7, ce qui est faux.

Donc, si le système (a) est possible, il faut que la somme $x + y$ soit impaire. Dans ce cas, on a les deux équations

$$\frac{y}{2} = \mathrm{F}, \quad \frac{2x - y}{6} = \mathrm{G}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2(x+y)}{6} = 7.9u^3 = \mathrm{F} + \mathrm{G},$$

ce qui est impossible, F étant premier à 3, tandis que G est multiple de 9. Le système (a) est donc impossible.

Il en est de même du système (b), dont la deuxième équation s'écrit sous l'une des deux formes

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2 = 7v^3, \quad \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2x-y}{6}\right)^2 = 7v^3,$$

suivant que la somme $x + y$ est paire ou impaire. En vertu du théorème IV, elles entraînent respectivement les deux équations

$$\frac{x-y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6} = (2 \pm \sqrt{-3})(\mathrm{F} + \sqrt{-3}.\mathrm{G}),$$

$$\frac{y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{2x-y}{6} = (2 \pm \sqrt{-3})(\mathrm{F} + \sqrt{-3}.\mathrm{G}).$$

La première donne

$$\frac{x+y}{6} = \frac{9.u^3}{2} = 2\mathrm{G} \pm \mathrm{F},$$

ce qui est impossible.

La seconde entraîne comme conséquence les deux équations

$$\frac{y}{2} = 2F \mp 3G, \quad \frac{2x - y}{6} = 2G \pm F,$$

d'où

$$\frac{x + y}{3} = 9 . u^3 = (2F \mp 3G) + (2G \pm F);$$

ce qui est impossible; car cette équation, réduite en congruence, suivant le module 9, donne le résultat absurde

$$2 \pm 1 \equiv 0 \pmod{9}.$$

L'équation proposée est donc impossible; en d'autres termes :

THÉORÈME XXVII. — *Le nombre 21 n'est pas décomposable en une somme de deux cubes rationnels.*

On démontrerait de la même manière l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^3 + y^3 = 196 . z^3.$$

Exemple III.

$$(3) \qquad x^3 + y^3 = 38 . z^3.$$

40. 1° Si z n'est pas multiple de 3, cette équation se décomposera de l'une des manières suivantes :

$$(a) \quad x + y = 38u^3, \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = v^3 = F^2 + 3G^2.$$

$$(b) \quad x + y = 2u^3, \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 19v^3 = (4^2 + 3)(F^2 + 3G^2).$$

Dans le premier cas on a

$$\frac{x + y}{2} = 19u^3 = F = f(f^2 - 9g^2).$$

Comme les trois facteurs f, $f + 3g$, $f - 3g$ sont premiers entre eux, la décomposition de cette équation n'aura lieu que de l'une des

manières suivantes :

$$19\alpha^3 = f, \quad f + 3g = \beta^3, \qquad f - 3g = \gamma^3,$$
$$\alpha^3 = f, \quad f \pm 3g = 19\beta^3, \quad f \mp 3g = \gamma^3;$$

d'où l'on déduit respectivement les deux équations

$$\beta^3 + \gamma^3 = 38\alpha^3, \quad 19\beta^3 + \gamma^3 = 2\alpha^3.$$

La première doit être rejetée, parce qu'elle ne diffère pas de l'équation (3) vérifiée par des diviseurs de z. La seconde est impossible, parce qu'on en déduit la conclusion fausse que 2 est résidu cubique de 19. Le système (a) est donc impossible.

En appliquant le théorème IV au système (b), on en déduit

$$\frac{x+y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{x-y}{2} = (4F \mp 3G) + \sqrt{-3}(4G \pm F),$$

$$\frac{x+y}{2} = 4F \mp 3G, \quad \frac{x-y}{2} = 4G \pm F,$$

d'où

$$\frac{x+y}{2} \mp \frac{x-y}{2} = x \quad \text{ou} \quad y = 3F - G(\pm 4 \pm 3).$$

L'un des deux nombres x, y serait donc multiple de 3; mais alors l'équation proposée, réduite suivant le module 9, donne la congruence absurde

$$\pm 1 \equiv \pm 2 \pmod{9}.$$

Le système (b) est donc aussi impossible.

2° Supposons que le nombre z est multiple de 3, la décomposition de l'équation proposée donne l'un des deux systèmes

$$(a') \quad x + y = 18.19u^3, \quad \frac{x-y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6} = F + \sqrt{-3}.G,$$

$$(b') \quad x + y = 18u^3, \quad \frac{x-y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6} = (4 \pm \sqrt{-3})(F + \sqrt{-3}.G).$$

Dans le premier cas, on aurait l'équation

$$\frac{x+y}{18} = 19u^3 = \frac{1}{3}G = g(f^2 - g^2),$$

dont la décomposition donne l'un des systèmes

$$19\alpha^3 = g, \quad f+g=\beta^3, \qquad f-g=\gamma^3,$$
$$\alpha^3 = g, \quad f\pm g = 19\beta^3, \quad f\mp g=\gamma^3;$$

d'où

$$\beta^3-\gamma^3 = 38\alpha^3, \quad 19\beta^3-\gamma^3 = \pm 2\alpha^3.$$

La première équation doit être rejetée, parce qu'elle ne diffère de l'équation proposée qu'en ce que les nouvelles valeurs des indéterminées β, $-\gamma$, α sont des diviseurs de z. La seconde est impossible, parce qu'elle conduit à cette fausse conclusion que 2 serait résidu cubique de 19. Donc le système (a') est impossible.

Le second système (b') conduit à l'équation impossible

$$\frac{x+y}{6} = 3u^3 = 4G \pm F = 12g(f^2-g^2 \pm f\sqrt{f^2-3g^2});$$

il est donc aussi impossible.

En réunissant les résultats obtenus 1° et 2°, nous voyons que l'équation proposée ne peut être vérifiée ni en supposant z premier à 3, ni en supposant z divisible par 3; elle est donc impossible. Donc :

THÉORÈME XXVIII. — *Le nombre* 38 *n'est pas décomposable en une somme de deux cubes rationnels.*

Exemple IV.

(4) $$x^3+y^3 = 76.z^3.$$

41. D'abord z doit être multiple de 3; car autrement cette équation donnerait, suivant le module 9, l'une des deux congruences impossibles

$$\pm 1 \pm 1 \equiv \pm 4, \quad \pm 1 \equiv \pm 4 \pmod{9}.$$

Ainsi la décomposition de l'équation proposée donnera l'un des deux systèmes

$$(a) \quad x+y = 36.19u^3, \quad \frac{x-y}{2}+\sqrt{+3}\,\frac{x+y}{6} = F+\sqrt{-3}.G,$$

$$(b) \quad x+y = 36.u^3, \quad \frac{x-y}{2}+\sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6} = (4\pm\sqrt{-3})(F+\sqrt{-3}.G).$$

Le second donne l'équation impossible

$$\frac{x+y}{6} = 6u^3 = 4G \pm F \equiv \pm 1 \quad (\text{mod. } 9).$$

Le premier conduit à l'équation

$$\frac{x+y}{6} = 6.19u^3 = G, \quad 2.19u^3 = g(f^2 - g^2),$$

dont la décomposition donne l'un des systèmes suivants :

$$2.19\alpha^3 = g, \quad f+g = \beta^3, \quad f-g = \gamma^3,$$
$$2\alpha^3 = g, \quad f \pm g = 19\beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3.$$

On en déduit respectivement les deux équations

$$76\alpha^3 = \beta^3 + (-\gamma)^3, \quad 19\beta^3 - \gamma^3 = \pm 4\alpha^3,$$

dont la seconde est impossible, parce qu'elle conduit à cette conclusion fausse, que 4 est résidu cubique de 19; et la première doit être rejetée, parce qu'elle ne diffère de l'équation proposée qu'en ce que les nouvelles valeurs des indéterminées sont des diviseurs de z.

L'équation proposée est donc impossible.

THÉORÈME XXIX. — *Il est impossible de décomposer le nombre* 76 *en une somme de deux cubes rationnels.*

Exemple V.

(5) $$x^3 + y^3 = 39.z^3.$$

42. D'abord, comme la somme de deux cubes ne peut être multiple de 3 sans l'être de 9, le nombre z doit être divisible par 3.

La résolution de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à celle de l'un des deux systèmes

(a) $$x + y = 27.13u^3, \quad x^2 - xy + y^2 = 3v^3,$$

(b) $$x + y = 27u^3, \quad x^2 - xy + y^2 = 39v^3.$$

Suivant que z est pair ou impair, la deuxième équation (a) se ramène à l'une des suivantes :

$$\frac{x-y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{x-y}{6} = \mathrm{F} + \sqrt{-3}.\mathrm{G}, \quad \frac{y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{2x-y}{6} = \mathrm{F} + \sqrt{-3}.\mathrm{G}.$$

Dans le premier cas on doit résoudre l'équation

$$\frac{x+y}{6} = \frac{9.13u^3}{2} = 3g(f^2 - g^2), \quad 3.13u^3 = 2g(f^2 - g^2).$$

Or, en excluant les décompositions qui donnent des équations de même forme que la proposée, on trouve que l'on doit résoudre une équation de la forme

$$3a^3 + 13b^3 + c^3 = 0,$$

en attribuant aux indéterminées a, b, c des valeurs entières et premières entre elles deux à deux; ce qui est impossible, car 3 n'est pas résidu cubique de 13.

Dans le second on a les deux équations

$$\frac{y}{2} = \mathrm{F}, \quad \frac{2x-y}{6} = \mathrm{G}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2(x+y)}{6} = \mathrm{F} + \mathrm{G} = 9u^3,$$

ce qui est impossible. Le système (a) est donc impossible.

De même le système (b) se ramène à l'une des équations

$$\frac{x-y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6} = (1 \pm 2\sqrt{-3})(\mathrm{F} + \sqrt{-3}.\mathrm{G}),$$

$$\frac{y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{2x-y}{6} = (1 \pm 2\sqrt{-3})(\mathrm{F} + \sqrt{-3}.\mathrm{G}).$$

On déduit de la première

$$\frac{x+y}{6} = \frac{9u^3}{2} = \mathrm{G} \pm 2\mathrm{F},$$

ce qui est impossible, G étant multiple de 9 et F ne l'étant pas.

La seconde équation donne les suivantes :

$$\frac{y}{2} = F \mp 6G, \quad \frac{2x-y}{6} = G \pm 2F;$$

d'où

$$\frac{x+y}{3} = 9u^3 = (F \mp 6G) + (G \pm 2F),$$
$$\pm 1 \pm 2 \equiv 0 \pmod{9},$$

ce qui est absurde. Le système (b) est donc aussi impossible. Donc :

THÉORÈME XXX — *Le nombre* 39 *n'est pas décomposable en une somme de deux cubes rationnels.*

Exemple VI.

(6) $$x^3 + y^3 = 57.z^3.$$

45. De même que dans l'exemple précédent, et pour la même raison, le nombre z doit être multiple de 3; de telle sorte qu'on déduira de l'équation (b) l'un des deux systèmes

$$(a) \qquad x + y = 27.19u^3, \quad x^2 - xy + y^2 = 3v^3,$$
$$(b) \qquad x + y = 27.u^3, \quad x^2 - xy + y^2 = 3.19v^3.$$

Nous allons démontrer qu'ils sont l'un et l'autre impossibles.

D'abord la somme $x + y$ ne peut pas être impaire; car alors on déduirait du système (a)

$$\frac{y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{2x-y}{6} = F + \sqrt{-3}\,G;$$

d'où

$$\frac{y}{2} = F, \quad \frac{2x-y}{6} = G, \quad F + G = \frac{2(x+y)}{6} = 9.19u^3,$$

ce qui est impossible. Le système (b) donnerait l'équation

$$\frac{y}{2} + \sqrt{-3}\,\frac{2x-y}{6} = (4 \pm \sqrt{-3})(F + \sqrt{-3}\,G),$$

d'où

$$\frac{y}{2}=4F\mp 3G,\quad \frac{2x-y}{6}=4G\pm F;\quad \frac{2(x+y)}{6}=4G\pm F+4F\mp 3G;$$

$$9u^3=4G+4F\pm F\mp 3G\equiv\pm 4\pm 1\pmod{9},$$

ce qui est également impossible. La somme $x+y$ est donc paire, et par suite les deux systèmes (a) et (b) se ramènent respectivement aux deux équations

$$(a')\qquad \frac{x-y}{2}+\sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6}=F+\sqrt{-3}\,G,$$

$$(b')\qquad \frac{x-y}{2}+\sqrt{-3}\,\frac{x+y}{6}=(4F\mp 3G)+\sqrt{-3}\,(4G\pm F).$$

La seconde donnerait l'équation impossible

$$\frac{x+y}{6}=\frac{9u^3}{2}=4G\pm F;$$

on doit donc la rejeter. Quant à la première, elle donne l'équation

$$3.19u^3=2g(f^2-g^2),$$

dont la décomposition ramène l'une des deux équations

$$3.19\alpha^3=\beta^3+\gamma^3,\quad 3\alpha^3+19\beta^3+\gamma^3=0,$$

dans lesquelles α, β, γ sont diviseurs de u et par conséquent de z; de plus ces trois nombres sont premiers entre eux deux à deux. La première ne différant pas de l'équation proposée, on doit la rejeter. Quant à la seconde elle est impossible, parce qu'on en déduirait cette conclusion fausse que 3 serait résidu cubique de 19.

Ainsi les deux systèmes (a) et (b) sont impossibles, et par suite l'équation proposée n'est pas résoluble en nombres entiers. Donc :

THÉORÈME XXXI. — *Le nombre* 57 *n'est pas décomposable en une somme de deux cubes rationnels.*

44. Nous venons de rencontrer trois multiples de 19, qui ne peuvent pas se décomposer en deux cubes rationnels, 38, 76, 57. Quant au nombre 19 lui-même, on peut prévoir *a priori* qu'il est décomposable. Il suffit de se rappeler le théorème suivant, que nous avons donné à la fin du Mémoire cité :

Tout nombre $A^2 + 3B^2$ *est décomposable en une somme de deux cubes rationnels, lorsque l'un des trois nombres* $2A$, $3B \pm A$ *est un cube, ou que l'un des trois nombres* $2B$, $A \pm B$ *est le triple d'un cube.*

En effet, $19 = 4^2 + 3.1^2$; or le produit 2.4 est un cube.

D'ailleurs on vérifie sans peine que l'on a

$$19 = 3^3 - 2^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

On démontrerait par la même méthode l'impossibilité de décomposer en deux cubes rationnels l'un des nombres 31, 93, 95, 190. Nous ne nous arrêterons pas sur ce sujet : les exemples qui précèdent suffiront pour montrer de quelle manière on doit appliquer les théorèmes III et V, en les combinant avec le principe de non-congruence suivant le module 9, ou suivant quelque module de la forme $6l + 1$.

Mémoire sur les fonctions de Legendre;

PAR M. H. LAURENT.

I. — *Préliminaires.*

Le but de ce Mémoire est de donner une théorie des fonctions X_n, déduite d'un seul principe, et de montrer comment ce principe peut conduire à la découverte de nouvelles propriétés des polynômes de Legendre.

M. Heine a publié en Allemagne un Traité complet des fonctions X_n et de leurs conjuguées; mais ce traité pourrait être considérablement simplifié en faisant usage du calcul des résidus : c'est ce que je me propose de faire ici.

J'appellerai fonction X_n le coefficient de z^n dans le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$; en sorte que l'on aura

$$(1)\qquad (1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots$$

La manière la plus simple d'effectuer le développement consiste à appliquer la formule de Lagrange au développement de la racine $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-2xz+z^2}\right)$ de l'équation

$$u = x + z\frac{u^2-1}{2};$$

on trouve alors

$$\frac{1-\sqrt{1-2zx+z^2}}{2} = x + \frac{z}{2}(x^2-1) + \frac{z^2}{2.4}\frac{d}{dx}(x^2-1)^2 + \ldots,$$

et, en différentiant par rapport à x,

$$(2)\quad (1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1) + \ldots + \frac{z^n}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n + \ldots;$$

cette formule comparée avec (1) donne

$$(3) \qquad X_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Pour trouver les conditions de convergence de la série (1), on peut mettre le premier membre sous la forme suivante : on pose $x = \cos\gamma$, et l'on a

$$\begin{aligned}(1-2z\cos\gamma+z^2)^{-\frac{1}{2}} &= (z-e^{\gamma\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}(z-e^{-\gamma\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}\\ &= (1-ze^{\gamma\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}(1-ze^{-\gamma\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Quand γ est réel, on voit que la convergence est assurée dès que le module de z est moindre que l'unité; mais on peut préciser les limites de convergence en observant que, si l'on fait

$$2x = y + \frac{1}{y},$$

on a

$$(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-zy)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour qu'il y ait convergence, il faut que l'on ait à la fois

$$\text{mod.}\, zy < 1, \quad \text{mod.}\frac{z}{y} < 1,$$

ou bien

$$\text{mod.}\, z < \text{mod.}\, y \quad \text{et} \quad < \text{mod.}\frac{1}{y}.$$

Soit donc ω le plus petit des deux nombres mod. y et mod. $\frac{1}{y}$; on aura

$$\text{mod.}\, z < \omega.$$

L'équation mod. $z = 0$ servira à délimiter la région de convergence pour la variable x. Posons

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1}, \quad y = \omega e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad \frac{1}{y} = \omega^{-1}e^{-\theta\sqrt{-1}};$$

nous aurons

$$2\xi = \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)\cos\theta, \quad 2\eta = \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\sin\theta\,;$$

d'où, par l'élimination de θ,

$$\frac{4\xi^2}{\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2} + \frac{4\eta^2}{\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^2} = 1.$$

On voit donc que, si z varie dans l'intérieur d'un cercle de rayon ω décrit de l'origine comme centre, la série (1) sera convergente si x varie à l'intérieur d'une ellipse concentrique ayant pour demi-axes

$$\frac{\omega + \omega^{-1}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\omega - \omega^{-1}}{2}.$$

Les foyers de cette ellipse ont pour abscisses ± 1; donc toutes les ellipses de convergence relatives à la variable x et correspondant à un cercle donné de convergence pour la variable z sont homofocales.

J'arrive maintenant à l'étude des propriétés des fonctions X_n. Ces fonctions affectent deux formes principales qui se déduisent immédiatement de leur définition.

1° X_n étant le coefficient de z^n dans $(1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, on a, d'après une formule aujourd'hui bien connue de Cauchy,

$$(4) \qquad X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2zx + z^2}}.$$

L'intégrale est prise autour de l'origine.

2° La formule (3) de Rodrigues conduit également à une intégrale définie; on a en effet

$$(5) \qquad X_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n(x^2-1)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{1}{2^n}\int \frac{(z^2-1)^n\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

L'intégrale est prise autour du point x.

Ce sont ces formules (4) et (5) qui vont nous fournir toute la théorie des fonctions X_n.

II. — *Conséquences de la première formule fondamentale.*

Si dans la formule (4) on suppose $x = \cos\gamma$ et γ réel, on pourra supposer le module de z un peu inférieur à l'unité; mais, au lieu d'intégrer le long du contour circulaire qui en résulterait, on peut aussi intégrer le long d'un contour circulaire de rayon infini, pourvu que l'on ajoute à l'intégrale ainsi obtenue l'intégrale prise le long d'un contour enveloppant les deux points critiques $z = e^{\gamma\sqrt{-1}}$ et $e^{-\gamma\sqrt{-1}}$, situés tous deux à la distance 1 de l'origine. Le contour que nous choisirons se composera de deux arcs de cercle concentriques de rayons $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$ limités dans le voisinage des points critiques, et sera terminé par deux petits cercles décrits autour de ces points critiques avec des rayons infinitésimaux. Les intégrales relatives à ces petits contours circulaires seront nulles. En faisant tendre ε vers zéro et en observant que le radical contenu sous le signe $\int$ change de signe quand on tourne autour d'un point critique, on aura pour la valeur de X_n

$$X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\int\frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2zx+z^2}} + 2\int\frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2zx+z^2}}\right);$$

la première intégrale est prise le long d'un contour circulaire infini; elle est nulle comme l'on voit; la seconde est prise le long d'un arc de cercle décrit de l'origine comme centre, et limité aux points $e^{\gamma\sqrt{-1}}$, $e^{-\gamma\sqrt{-1}}$. On intégrera le long de cet arc de cercle en posant

$$z = e^{\theta\sqrt{-1}};$$

en prenant pour limites $-\gamma$ et $+\gamma$, on aura donc

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma}\frac{d\theta}{e^{n\theta\sqrt{-1}}\sqrt{1-2\cos\gamma\, e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{2\theta\sqrt{-1}}}},$$

ou

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma}\frac{d\theta}{e^{(n+\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}}\sqrt{e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{-\theta\sqrt{-1}}-2\cos\gamma}}.$$

ou enfin

$$(6)\qquad X_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\theta \cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\gamma)}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma} \frac{d\theta \cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\gamma)}}.$$

Cette formule permet de calculer la fonction X_n pour de grandes valeurs de n; en effet, si l'on pose $\theta = \gamma - v$, on a

$$X_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma} \frac{dv \cos(n+\frac{1}{2})(\gamma - v)}{\sqrt{2(\cos\gamma - v - \cos\gamma)}}.$$

Cette intégrale n'a de valeur sensible que pour les petites valeurs ε de v, et l'on peut écrire, à une quantité d'ordre supérieur près par rapport à $\frac{1}{n}$,

$$X_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dv \cos(n+\frac{1}{2})(\gamma - v)}{\sqrt{2v\sin\gamma}},$$

ou

$$X_n = \frac{2}{\pi}\left[\cos(n+\tfrac{1}{2})\gamma \int_0^{\infty} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})v}{\sqrt{2v\sin\gamma}}dv + \sin(n+\tfrac{1}{2})\gamma \int_0^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})v\,dv}{\sqrt{1v\sin\gamma}}\right].$$

Or on a

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega b}{\sqrt{\omega}}\,d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\cos\omega b\,d\omega}{\sqrt{\omega}} = \sqrt{\frac{2\pi}{b}}.$$

La formule précédente pourra donc s'écrire

$$X_n = \frac{2}{\pi}\left[\cos(n+\tfrac{1}{2})\gamma + \sin(n+\tfrac{1}{2})\gamma\right]\sqrt{\frac{2\pi(n+\frac{1}{2})^{-1}}{2\sin\gamma}},$$

ou enfin exactement

$$(7)\qquad X_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{n\sin\gamma}}\left[\cos(n+\tfrac{1}{2})\gamma + \sin(n+\tfrac{1}{2})\gamma\right](1+\varepsilon),$$

ε désignant une quantité nulle pour $n = \infty$.

Supposons, en second lieu, x quelconque, et, au lieu de l'arc de cercle considéré tout à l'heure substituons le chemin rectiligne qui va

de la racine $x - \sqrt{x^2 - 1}$ de l'équation

$$\alpha^2 - 2\alpha x + 1 = 0$$

à l'autre racine $x + \sqrt{x^2 - 1}$; nous trouverons, par un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire,

$$X_n = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2zx + z^2}},$$

et l'intégrale est prise le long du contour rectiligne dont nous venons de parler. Pour effectuer l'intégration, nous poserons tout naturellement

$$z = x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi, \quad dz = -\sin\varphi\sqrt{x^2 - 1}\,d\varphi,$$

et nous prendrons pour limites 0 et π; nous aurons alors

$$(8) \qquad X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}};$$

si l'on avait d'abord changé z en $\frac{1}{z}$ dans la formule (4), on aurait eu

$$X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz.z^n}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}.$$

Cette formule, dans laquelle l'intégrale est prise dans le sens rétrograde et le long d'un cercle de grand rayon, se transforme comme la précédente en

$$(8\ bis) \qquad X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

Les formules (8) et (8 *bis*) sont dues à Laplace, qui les a démontrées d'une façon toute différente.

Si l'on essaye de calculer X_n par la formule (8), les règles les plus élémentaires du Calcul intégral conduisent à chercher une formule de réduction, laquelle ne sera autre chose qu'une équation aux diffé-

rences ayant pour solution X_n. Cherchons cette formule de réduction. Posons

$$U_{n+1} = \int \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+2}},$$

on a

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}} = \frac{\cos\varphi\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}} + (n+1)\frac{\sin^2\varphi(x^2-1)}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+2}}.$$

Pour simplifier, nous poserons

$$R = x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi,$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\sqrt{x^2-1}}{R^{n+1}} &= \frac{R-x}{R^{n+1}} + (n+1)\frac{(x^2-1)-(x^2-1)\cos^2\varphi}{R^{n+2}}\\ &= \frac{1}{R^n} - \frac{x}{R^{n+1}} - (n+1)\frac{R^2-2x^2-2x\sqrt{x^2-1}\cos\varphi+1}{R^{n+2}},\end{aligned}$$

ou enfin

$$(a)\qquad \frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\sqrt{x^2-1}}{R^{n+1}} = (2n+1)x\frac{1}{R^{n+1}} - \frac{n+1}{R^{n+2}} - \frac{n}{R^n};$$

si l'on intègre par rapport à φ, on a, à une constante près,

$$(b)\qquad \frac{\sin\varphi\sqrt{x^2-1}}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}} = (2n+1)xU_n - (n+1)U_{n+1} - nU_{n-1},$$

et entre les limites zéro et π on a

$$(9)\qquad (2n+1)xX_n - (n+1)X_{n+1} - nX_{n-1} = 0.$$

Telle est l'équation aux différences, à laquelle nous voulions parvenir. X_n n'est pas la seule solution de cette équation, et il doit exister une autre solution Ξ_n, telle que $CX_n + C'\Xi_n$ en soit la solution la plus générale, C et C′ désignant deux constantes ou fonctions périodiques.

On trouvera la solution Ξ_n très-simplement, en repassant attentivement les calculs que nous venons de faire; on s'apercevra alors sans peine que les formules (a) et (b) auraient encore lieu si, au sinus et au

cosinus circulaires de la variable φ on substituait le sinus et le cosinus hyperboliques de cette variable; mais, pour en conclure la formule (9), il faudrait prendre pour limites d'intégration zéro et ∞ ; on a donc, en posant

$$(10) \qquad \Xi_n = \int_0^x \frac{d\varphi}{(x + \cosh\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}},$$

la relation

$$(2n+1)\Xi_n x - (n+1)\Xi_{n+1} - n\Xi_{n-1} = 0;$$

Ξ_n sera connu dès que l'on donnera Ξ_0 et Ξ_1. Or on a

$$\int_0^x \frac{d\varphi}{a + b\cosh\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \log \frac{a - \sqrt{a^2-b^2}}{b},$$

et, en différentiant par rapport à a,

$$\int_0^x \frac{d\varphi}{(a + b\cosh\varphi)^2} = (a^2-b^2)^{\frac{3}{2}} a \log \frac{a - \sqrt{a^2-b^2}}{b} + \frac{1}{a^2-b^2};$$

si dans ces formules on fait $a = x$, $b = \sqrt{x^2-1}$, on a, en vertu de (10),

$$\Xi_0 = \log\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$\Xi_1 = x\log\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1.$$

Ξ_n est donc connu par la voie récurrente.

En étudiant l'intégrale (8 *bis*) comme on a étudié l'intégrale (8), on parvient à reconstituer la formule (9), et l'on vérifie que la formule

$$\Xi_n = \int_0^\alpha (x - \sqrt{x^2-1}\cosh\varphi)^n d\varphi,$$

$$\alpha = \log\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

satisfait encore à la formule (9), tout en étant identique avec la fonction Ξ_n que nous avons rencontrée tout à l'heure.

III. — *Conséquences de la formule* (5).

La formule (5), équivalant au fond à celle de Rodrigues, contient presque toutes les propriétés de la fonction X_n. Ainsi, en posant

$$y = \int (z^2 - 1)^n (z - x)^{-(n+1)} dz,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \int (n+1)(z^2 - 1)^n (z - x)^{-(n+2)} dz,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int (n+1)(n+2)(z^2 - 1)^n (z - x)^{-(n+3)} dz;$$

or, si l'on considère la fonction

$$F(z) = (z+1)^{n+1}(z-1)^{n+1}(z-x)^{-(n+2)} = (z^2-1)^{n+1}(z-x)^{-(n+2)},$$

on aura, en différentiant par rapport à z,

$$F'(z) = (z^2-1)^n (z-x)^{-(n+3)}[(n+1)(z-1)(z-x) + (n+1)(z+1)(z-x) - (n+2)(z^2-1)].$$

ou

$$F'(z) = (z^2-1)^n (z-x)^{-(n+3)}[n(z-x)^2 - 2x(z-x) - (n+2)(x^2-1)];$$

si l'on intègre le long d'un contour fermé contenant le point x, on a, eu égard aux formules précédentes,

$$0 = ny - 2x\frac{dy}{dx}\frac{1}{n+1} - (x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{1}{n+1};$$

or y est égal à X_n, en vertu de la formule (5), à un facteur numérique près; donc X_n satisfait à l'équation précédente, que l'on peut écrire

$$(11) \qquad \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{dy}{dx}\right] = n(n+1)y.$$

D'après la théorie des équations linéaires, on sait que, X_n étant une

solution de cette équation, la solution la plus générale sera

$$y = C_1 X_n + C_2 X_n \int \frac{dx}{X_n^2 (x^2 - 1)},$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires.

Le calcul qui nous a conduit à la formule (11) réussirait encore si, au contour fermé d'intégration relatif à la formule (5), on substituait un contour rectiligne allant du point -1 au point $+1$; on en conclut que l'intégrale

$$y = \int_{-1}^{+1} (z^2 - 1)^n (z - x)^{-(n+1)} dz$$

satisfait à l'équation (11). Et en effet les calculs seront identiquement les mêmes, et l'intégrale de $F'(z)$ s'évanouira aux limites, comme s'il s'agissait d'un contour fermé; car $F(-1) = F(+1) = 0$.

Il est bon d'observer que, pour $n = 0$ et $n = 1$, on a successivement

$$y = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{z - x} = 2 \log \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$y = \int_{-1}^{+1} \frac{z^2 - 1}{(z - x)^2} dz = 4x \log \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 4,$$

ce qui fait pressentir une liaison assez intime entre ces intégrales et les fonctions que nous avons désignées plus haut par Ξ_n.

Si dans les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} X_m F(x) dx, \quad \int_{-1}^{+1} X_m X_n dx, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx,$$

où $F(x)$ désigne un polynôme entier de degré moindre que m, on remplace X_m par sa valeur tirée de la formule de Rodrigues, à savoir

$$X_m = \frac{1}{2.4\ldots 2m} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^2 - 1)^m,$$

et si l'on intègre par parties, on trouve sans difficulté

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1} X_m F(x)\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} X_m X_n\,dx = 0 \quad \text{pour} \quad m \lessgtr n, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1}; \end{cases}$$

on déduit de là cette conséquence importante : si l'on a identiquement

$$f(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_m X_m,$$

$A_1, A_2, \ldots$ désignant des constantes, on aura forcément

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) X_n\,dx,$$

en multipliant par $X_n dx$ et en intégrant de -1 à $+1$.

La formule de Rodrigues conduirait à une foule d'autres formules plus ou moins connues, mais dont l'importance n'est pas assez grande pour que nous les reproduisions ici.

Mais, avant de terminer ce paragraphe, rappelons que les valeurs de $X_0, X_1, \ldots, X_n$, pour $x = 1$, sont les coefficients [en vertu de la formule (12)] du développement de $\frac{1}{1-\alpha}$; on a donc pour $x = 1$

$$X_0 = 1, \quad X_1 = 1, \ldots, \quad X_n = 1, \ldots;$$

de même, pour $x = -1$,

$$X_0 = 1, \quad X_1 = -1, \ldots, \quad X_n = (-1)^n,$$

pour $x = 0$, les X_n sont les coefficients du développement de $(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire

$$1, \quad 0, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1.3}{2.4}, \quad 0, \ldots$$

La formule de Rodrigues met encore en évidence ce fait, que l'équation $X_n = 0$ a toutes ses racines réelles et comprises entre -1 et $+1$.

IV. — *Digression sur les fonctions de Bessel.*

La formule de O. Rodrigues met en évidence une relation curieuse, qui existe entre les fonctions de Bessel et les fonctions X_n; d'où résulte un rapprochement entre l'équation (8) et l'équation de Riccati.

On a

$$X_n(x) = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right],$$

et, en appliquant la formule de Leibnitz pour la différentiation d'un produit,

$$X_n(x) = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\left[(x-1)^n\, 1.2.3\ldots n \right.$$
$$\left. + \frac{n^2}{1}(x-1)^{n-1}\, 1.2.3\ldots n(x+1)\ldots\right],$$

ou bien

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n}\left\{(x-1)^n + \left(\frac{n}{1}\right)^2(x-1)^{n-1}(x+1)\right.$$
$$\left. + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2(x-1)^{n-2}(x+1) + \ldots\right\},$$

et, par suite,

$$2^n\frac{X_n(x)}{(x-1)^n} = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2\frac{x+1}{x-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \ldots.$$

Si l'on fait alors

$$\frac{x+1}{x-1} = z \quad \text{ou} \quad x = \frac{z+1}{z-1},$$

on a

$$2^{n-1}X_n\left(\frac{z+1}{z-1}\right)(z-1) = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 z + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 z^2 + \ldots,$$

et, remplaçant z par $\frac{x^2}{n^2}$,

$$2^{n-1}X_n\left(\frac{x^2+n^2}{x^2-n^2}\right)\frac{x^2-n^2}{n^2} = 1 + \frac{z^2}{1^2} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\frac{x^4}{1^2.2^2} + \ldots,$$

et, pour $n = \infty$, on a

$$\lim 2^n X_n \left(\frac{x^2 + n^2}{x^2 - n^2}\right) = 1 + \frac{x^2}{1^2} + \frac{x^4}{1^2 . 2^2} + \frac{x^6}{1^2 . 2^2 . 3^2} + \ldots.$$

Le second membre de cette formule est une fonction de Bessel.

V. — *Sur un développement important.*

Désignons par Z_n ce que devient X_n pour $x = z$; la formule (9) donne

$$(2n+1) Z_n z = (n+1) Z_{n+1} + n Z_{n-1},$$
$$(2n+1) X_n x = (n+1) X_{n+1} + n X_{n-1}.$$

Multiplions la première formule par X_n, la seconde par Z_n et retranchons, nous aurons

$$\begin{aligned}&(2n+1) X_n Z_n (z - x)\\ &\quad = (n+1)(Z_{n+1} X_n - Z_n X_{n+1}) - n(Z_n X_{n-1} - X_n Z_{n-1});\end{aligned}$$

faisons successivement dans cette formule $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons les équations ainsi obtenues; nous aurons

$$[X_0 Z_0 + 3 X_1 Z_1 + \ldots + (2n+1) X_n Z_n](z - x) = (n+1)(Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n);$$

si donc on pose

$$(a) \qquad \Phi(x, z) = X_0 Z_0 + 3 X_1 Z_1 + \ldots + (2n+1) X_n Z_n,$$

on aura

$$(13) \qquad \Phi(x, z) = \frac{n+1}{z - x} (Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n).$$

Cette formule est, je crois, entièrement nouvelle. La formule (a) intégrée par rapport à z devient, en ayant égard aux formules (12),

$$\int_{-1}^{+1} \Phi_n(x, z) dz = 2,$$

et, par suite, la formule (13), intégrée aussi par rapport à z, donne

$$2 = (n+1)X_n \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1}}{z-x}\,dz - (n+1)X_{n+1}\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n}{z-x}\,dz;$$

d'où l'on tire la formule

$$(14)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1}}{z-x}\,dz = \frac{2}{(n+1)X_n} + \frac{X_{n+1}}{X_n}\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n\,dz}{z-x};$$

or on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_0}{z-x}\,dz = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{z-x} = \log\frac{1-x}{1+x};$$

la formule (14) donne alors, pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_1\,dz}{z-x} = \frac{z}{X_0} + \frac{X_1}{X_0}\log\frac{1-x}{1+x}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_2\,dz}{z-x} = \frac{2}{2X_1} + \frac{X_2}{X_1}\int \frac{Z_1\,dz}{z-x}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où l'on déduit

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n\,dz}{z-x} = X_n\left(\log\frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{X_0X_1} + \frac{2}{2X_1X_2} + \ldots + \frac{2}{X_{n-1}X_n}\right),$$

ou encore

$$(15)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n\,dz}{z-x} = 2X_n\left(\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{X_0X_1} + \frac{1}{2X_1X_2} + \cdots + \frac{1}{nX_{n-1}X_n}\right).$$

Il y a plusieurs conséquences à déduire de là : et d'abord, si l'on divise par X_n, en supposant X compris entre -1 et $+1$ et égal à $\cos\gamma$, on aura

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n}{X_n}\frac{dz}{z-x} = 2\left(\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{X_0X_1} + \ldots\right);$$

Si alors on fait $n = \infty$, X_n ne tendra pas vers zéro en général, x devant être supérieur à 1 [sans quoi la série (1) serait convergente pour $x > 1$ et $z = 1$]; si l'on remplace alors Z_n par sa valeur approchée (7) et z par $\cos\gamma$, l'intégrale qui figure dans le premier membre tendra vers zéro, à cause des facteurs $\sin(n+\frac{1}{2})\gamma d\gamma$ et $\cos(n+\frac{1}{2})\gamma d\gamma$ qui sont à très-courte période, et l'on aura

$$\lim\left(\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{X_0X_1} + \frac{1}{2X_1X_2} + \ldots\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{X_0X_1} + \frac{1}{2X_1X_2} + \frac{1}{3X_2X_3} + \ldots,$$

et cette formule, démontrée par Gauss pour la première fois, a lieu pour toutes les valeurs de x supérieures en valeur absolue à l'unité. Il y a plus, on peut délimiter la région de convergence de cette série, ce qui n'avait pas encore été fait. Il résulte en effet de la démonstration qui a servi à l'établir qu'elle aura lieu si, z variant entre -1 et $+1$, $\frac{Z_n}{X_n}$ ne croît pas indéfiniment pour $n = \infty$, ce dont on sera assuré si X_n ne tend pas vers zéro ou si la série

$$X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots$$

est divergente; elle l'est, comme on l'a vu, quand x n'est pas réel ni compris entre -1 et $+1$.

Mais on peut tirer de la formule (15) des conséquences bien plus importantes. Admettons que $\frac{1}{a-x}$ soit développable comme il suit :

$$\frac{1}{a-x} = A_0X_0 + A_1X_1 + \ldots + A_nX_n + \ldots,$$

on aura, d'après ce que nous avons vu,

$$\frac{2}{a-x} = X_0\int_{-1}^{+1}\frac{Z_0}{a-z}dz + 3X_1\int_{-1}^{+1}\frac{Z_1}{a-z}dz + 5X_2\int_{-1}^{+1}\frac{Z_2}{a-x}dz \ldots.$$

La formule (4) fera connaître les différents termes du développement de

$\frac{1}{a-x}$, et l'on aura

$$\frac{1}{a-x} = X_0\left(\log\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) + 3X_1\left(\log\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \frac{1}{A_0A_1}\right)$$
$$+ 5X_2\left(\log\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \frac{1}{A_0A_1} - \frac{1}{2A_1A_2}\right) + \ldots,$$

$A_0, A_1, \ldots$ désignant les valeurs de $X_0, X_1, \ldots$ pour $x = a$.

VI. — *Étude de la fonction* Ξ_n.

Nous désignerons par Ξ_n la fonction définie par la relation

$$(16) \qquad \Xi_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n}{z-x}\,dz.$$

Nous avons vu comment, à l'aide de la formule (15), on peut exprimer Ξ_n au moyen de $X_0, X_1, \ldots, X_n$; mais on peut en donner une autre expression qui établira un lien de plus entre cette fonction et la fonction X_n. Si, en effet, dans la formule (16), on remplace Z_n par $\frac{d^n(z^2-1)^n}{2.4\ldots 2n.dz^n}$, et si l'on intègre n fois de suite par partie, on trouve

$$(17) \qquad \Xi_n = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1} \frac{(z-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz;$$

mais, dans le paragraphe IV, nous avons observé que l'intégrale qui figure dans la formule (17), laquelle représente X_n quand elle est prise le long d'un contour fermé contenant le point x, satisfait à l'équation différentielle

$$(8) \qquad \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{dy}{dx}\right] = n(n+1)y.$$

Cette équation, à laquelle satisfait X_n, a donc pour solution générale

$$y = CX_n + C'\Xi_n.$$

La formule (17) montre que Ξ_n peut aussi se représenter par la formule

$$(18) \qquad \Xi_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{(x^2-1)^n}{z-x} dz.$$

Ξ_n, développé suivant les puissances descendantes de x, commence ainsi par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$; les coefficients sont d'ailleurs faciles à calculer. On remarquera aisément que la fraction $\frac{(z^2-1)^n}{z-x}$ peut se décomposer en un polynôme entier en z, de degré $2n-1$ en z et en x, et en une fraction de la forme $\frac{(x^2-1)^n}{z-x}$; la formule (18) prend alors la forme

$$\Xi_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{2} \left[F(x) + 2(x^2-1)^n \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right],$$

ce qui donne

$$\Xi_n = X_n \left[\log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + Q_n(x) \right],$$

$Q_n(x)$ désignant un polynôme entier en x de degré n en plus. Divisons par $z-x$ les deux membres de la formule

$$(2n+1) Z_n z = (n+1) Z_{n+1} + n Z_{n-1}$$

[déduite de (19)], et intégrons de -1 à $+1$. Nous aurons

$$(2n+1) \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n z}{z-x} dz = \frac{n+1}{2} \Xi_{n+1} + \frac{n}{z} \Xi_{n-1}.$$

Or

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n z}{z-x} dz = \int_{-1}^{+1} Z_n dz + \int_{-1}^{+1} \frac{x Z_n}{z-x} dz = \frac{x}{z} \Xi_n.$$

La formule précédente devient donc

$$(2n+1) \Xi_n x = (n+1) \Xi_{n+1} + n \Xi_{n-1}.$$

C'est précisément l'équation (9). Or la fonction que nous désignons dans ce paragraphe par Ξ_n satisfait à l'équation (9), à laquelle satisfaisait la fonction désignée par la même lettre dans le paragraphe II. Ces deux fonctions Ξ_n sont d'ailleurs égales pour $n = 0$ et $n = 1$; elles sont donc identiques, et l'on a

$$\Xi_n = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1}\cosh\varphi)^{n+1}}.$$

Nous terminerons ce paragraphe en faisant connaître la fonction génératrice de Ξ_n. Il suffit, pour la trouver, d'observer que l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha z + \alpha^2}} = Z_0 + Z_1\alpha + Z_2\alpha^2 + \ldots.$$

Multiplions par $\frac{dz}{2(z-x)}$, et intégrons de -1 à $+1$. Nous aurons, tous calculs effectués,

$$(19)\quad \frac{1}{2\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} \log \frac{x - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}{x - \alpha + \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \Xi_0 + \Xi_1\alpha + \Xi_2\alpha^2 + \ldots.$$

VII. — *Développement de la fonction* $\frac{1}{x-t}$.

Reprenons les formules (12) et (13). On en déduit

$$X_0Z_0 + 3X_1Z_1 + \ldots (2n+1)X_nZ_n = \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n).$$

Divisons par $z - t$ et intégrons de $z = -1$ à $z = +1$; nous aurons

$$\sum_0^n \int_{-1}^{+1} (2n+1)X_n \frac{Z_n}{z-t}\,dz = \int_{-1}^{+1} \frac{(n+1)}{(z-x)(z-t)}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\,dz.$$

Décomposant en fractions simples la fraction $\frac{1}{(z-x)(z-t)}$, il vient

$$\sum_0^n \int_{-1}^{+1} (2n+1) X_n \frac{Z_n}{z-t} dz = \frac{1}{x-t}\left[\int_{-1}^{+1} \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\,dz \right.$$
$$\left. - \int_{-1}^{+1} \frac{n+1}{z-t}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\,dz\right].$$

La première intégrale qui figure dans la formule (2) est égale, en vertu des formules (12), (13) et (10), à 2. On a donc

$$(20) \qquad \sum_0^n \int_{-1}^{+1} (2n+1) X_n \frac{Z_n}{z-t} = \frac{2}{x-t} + \frac{\Omega}{x-t},$$

en posant, pour abréger,

$$\Omega = \int_{-1}^{+1} \frac{n+1}{z-t}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\,dz.$$

Lorsque la quantité Ω tendra vers zéro pour $n = \infty$, la formule (20) se transformera dans la suivante :

$$(21) \qquad \frac{1}{x-t} = \Theta_0 X_0 + 3\Theta_1 X_1 + 5\Theta_2 X_2, \ldots,$$

Θ_i désignant en général la valeur de Ξ_i pour $x = t$; en sorte que

$$\Theta_i = \frac{1}{z}\int_{-1}^{+1} \frac{X_i}{x-t}\,dx.$$

Toute la question se réduit donc à examiner dans quel cas Ω tend vers zéro. Or on a évidemment

$$\Omega = 2(n+1)(X_n\Theta_{n+1} - \Theta_n X_{n+1}),$$

ou, remplaçant X_n par sa valeur (8 *bis*) et Θ_n par sa valeur (10),

$$\Omega = \frac{2(n+1)}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\pi \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}{t+\sqrt{t^2-1}\cosh\psi}\right)^n A\,d\varphi\,d\psi,$$

A désignant, pour abréger, une quantité finie et indépendante de n. Il est visible que Ω tendra vers zéro, et ne tendra vers zéro que si l'on a, pour toutes les valeurs de φ comprises entre zéro et π et de φ comprises entre zéro et ∞,

$$\text{mod.}\ \frac{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}{t+\sqrt{t^2-1}\cosh\psi} < 1.$$

Si l'on fait

$$x = \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right), \quad t = \frac{1}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right),$$

cette formule devient

$$(a)\ \text{mod.}\left[u+\frac{1}{u}+\left(u-\frac{1}{u}\right)\cos\varphi\right] < \text{mod.}\left[v+\frac{1}{v}+\left(v-\frac{1}{v}\right)\cosh\psi\right];$$

soit r le module, θ l'argument de u, le module du premier membre de cette formule a pour carré

$$\left(r+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r+\frac{1}{r}\right)^2\cos^2\varphi+2\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\varphi;$$

son maximum a lieu pour $\cos\varphi = 1$, et alors il est égal à $2r^2$; le module maximum du premier membre de (a) est donc $r\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$ mod. u; le module minimum du second est $\sqrt{2}$ mod. v; la formule (a) prouve donc que l'on doit avoir

$$\text{mod.}\, u < \text{mod.}\, v.$$

Mais, quand u varie à l'intérieur d'un cercle de rayon r, x varie à l'intérieur d'une ellipse d'axes $\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $\left(r-\frac{1}{r}\right)$; quand v varie à l'extérieur d'un cercle de rayon r, t varie à l'extérieur d'une ellipse d'axes $\left(r+\frac{1}{r}\right)$ et $\left(r-\frac{1}{r}\right)$; il résulte de là que la formule (21) a lieu pour toutes les valeurs de x intérieures à une certaine ellipse et pour toutes les valeurs de t extérieures à la même ellipse; les foyers de cette ellipse sont les points ± 1.

Si l'on donne l'une des variables x ou t, le tracé de l'ellipse limitatrice sera très-simple; on sera ramené à construire cette courbe, connaissant les foyers et un point (l'affixe de la variable donnée).

VIII. — *Développement d'une fonction quelconque.*

Les fonctions de X_n présentent avec les cosinus des analogies frappantes : ainsi la formule de Fourier présente cette bizarrerie assez difficile à s'expliquer bien nettement, qu'elle est, pour les fonctions remplissant certaines conditions de continuité, convergente à l'intérieur ou à l'extérieur d'une ellipse, tandis qu'elle est toujours susceptible de représenter des fonctions, même discontinues, le long de l'axe des x. Les séries de X_n sont à ce point de vue comparables aux séries de Fourier.

Si, en effet, on considère la formule bien connue

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{z-x}\,dz = f(x),$$

elle donnera, quand il sera permis d'en faire usage,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int f(z)\,(X_0\zeta_0 + X_1\zeta_1 + \ldots)\,dz = f(x),$$

$\zeta_0, \zeta_1, \ldots$ désignant ce que deviennent $\Xi_0, \Xi_1, \ldots$ pour $x = z$.

On en conclut la possibilité du développement de $f(x)$ en série de X_n pour les valeurs de x intérieures à une certaine ellipse, que l'on découvrira en cherchant, parmi toutes les ellipses ayant pour foyers les points ± 1, la plus petite de celles qui passent par un point singulier de $f(z)$.

On voit aussi que, si le développement est impossible en série de X_n, il pourra l'être en série de Ξ_n, à l'intérieur d'une couronne elliptique. Partons maintenant de la formule (13)

$$X_0Z_0 + 3X_1Z_1 + \ldots (2n+1)X_nZ_n = \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n),$$

et, supposant x et z réels, multiplions par $f(z)\,dz$ et intégrons de -1

à $+1$, nous aurons

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &X_0\int_{-1}^{+1} Z_0 f(z)\,dz + \ldots (2n+1)X_n\int_{-1}^{+1} Z_n f(z)\,dz \\ &= (n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{f(z)}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\,dz. \end{aligned}\right.$$

Cherchons la limite de l'expression

$$W_n = (n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{f(z)}{(z-x)}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\,dz,$$

pour $n=\infty$; à cet effet, remplaçons Z_n et X_n par leurs valeurs (7) ; nous aurons

$$\begin{aligned} W_n = (n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{f(z)\,dz}{z-x}\frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)\sin\gamma\sin\delta}} \\ \times\Big\{\Big[\cos\Big(n+\tfrac{1}{2}\Big)\gamma + \sin\Big(n+\tfrac{1}{2}\Big)\gamma\Big]\Big[\cos\Big(n+\tfrac{3}{2}\Big)\delta + \sin\Big(n+\tfrac{3}{2}\Big)\delta \\ - \Big[\cos\Big(n+\tfrac{3}{2}\Big)\gamma + \sin\Big(n+\tfrac{3}{2}\Big)\gamma\Big]\Big[\cos\Big(n+\tfrac{1}{2}\Big)\delta + \sin\Big(n+\tfrac{1}{2}\Big)\delta\Big\}, \end{aligned}$$

$\cos\gamma$ et $\cos\delta$ représentant respectivement x et z. Les facteurs $(n+1)$ et $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ se détruisent aux limites; on voit de plus que c'est seulement pour $Z = x$ que l'intégrale W_n a une valeur appréciable, à cause des facteurs à courte période, tels que $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma$ et $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma$; cette circonstance permet de faire sortir $f(z)$ de dessous le signe $\int$ et de le remplacer par $f(x)$. Mais alors W_n devient le produit de $f(x)$ par ce que deviendrait cette même quantité W_n si $f(z)$ était égal à l'unité, mais dans ce cas $W_n = 2$; on a donc

$$W_\infty = 2f(x)$$

et par suite

$$(22)\quad f(x) = \frac{1}{2}X_0\int_{-1}^{+1} f(z)\,Z_0\,dz + \ldots \frac{2n+1}{2}X_n\int_{-1}^{+1} Z_n f(z)\,dz + \ldots.$$

Cette dernière démonstration, comme l'on voit, ne suppose pas que $f(z)$ soit continue de -1 à $+1$: elle suppose, comme dans la démonstration du théorème de Fourier, que $f(z)$ ne passe pas une infinité de maxima ou de minima. Si notre démonstration a été très-rapide, c'est que nous avons pensé inutile d'insister sur des détails bien connus du lecteur, qui a présent à l'esprit la démonstration rigoureuse du théorème de Fourier.

Nous avons supposé x compris entre -1 et $+1$; si x n'était pas compris dans ces limites, le second membre de la formule (22) ne serait plus égal à $f(x)$, mais bien à zéro, W_n ayant une valeur infiniment petite, à cause des facteurs finis et à courte période qu'il contient.

IX. — *Généralisation des fonctions* X_n.

La fonction X_n s'est présentée comme le terme général du développement de $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$, dérivée d'une racine de l'équation

$$z = x + \alpha\frac{x^2-1}{2}.$$

En général, si l'on considère l'équation

$$z = x + \alpha F(z), \tag{23}$$

$F(z)$ désignant le polynôme

$$F(z) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k), \tag{24}$$

on aura

$$z = x + \alpha F(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d}{dx}F^2(x) + \ldots$$

et

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \alpha\frac{dF}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d^2F^2}{dx^2} + \ldots;$$

$\frac{1}{n!}\frac{d^n F^n(x)}{dx^n}$ est donc le coefficient de α^n dans la dérivée d'une racine de l'équation (23); nous désignerons ce polynôme de degré $nk - n$ par $\Phi_n(x)$. Il est évident que, si $\psi(x)$ est un polynôme de degré inférieur à n, on aura

$$\int_{a_i}^{a_j} \Phi_n \psi(x)\, dx = 0,$$

et que l'équation $\Phi_n = 0$ aura toutes ses racines réelles et inégales si l'équation $F(z) = 0$ a elle-même toutes ses racines réelles. Si a_i et a_{i+1} sont réels entre a_i et a_j, l'équation $\Phi_n = 0$ aura n racines réelles. De l'équation

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n F^n(x)}{dx^n}$$

on conclut

$$(25) \qquad \Phi_n(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{F^n(z)}{(z-x)^{n+1}}\, dz,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé contenant le point x. Il en résulte

$$(26) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\Phi_n}{dx} = \dfrac{n+1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int \frac{F^n(z)}{(z-x)^{n+2}}\, dz, \\ \dfrac{d^2\Phi_n}{dx^2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int \frac{F^n(z)}{(z-x)^{n+3}}\, dz, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Or, si l'on pose

$$V = (z-a_1)^{n+1}(z-a_2)^{n+1}\ldots(z-a_k)^{n+1}(z-x)^{-(n+k)}$$

ou

$$V = F^{n+1}(z)(z-x)^{-(n+k)},$$

on a

$$\frac{dV}{dz} = (n+1)F^n(z)\frac{dF}{dz}(z-x)^{-(n+k)} + (n+k)(z-x)^{-(n+k+1)}F^{n+1}(z)$$

ou

$$\frac{dV}{dz} = F^n(z)(z-x)^{-(n+k+1)}\left[(n+1)\frac{dF}{dz}(z-x) + (n+k)F(z)\right].$$

Or, si l'on observe que

$$F(z) = F(x) + (z-x)\frac{dF}{dx} + \frac{(z-x)^2}{1.2}\frac{d^2F}{dx^2} + \ldots,$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dx} + (z-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{(z-x)^2}{1.2}\frac{d^3F}{dx^3} + \ldots,$$

on conclut de l'équation qui précède

$$(27) \qquad \frac{dV}{dz} = F^n(z)[(n+k)F(x)(z-x)^{-(n+k+1)} + \ldots].$$

Si l'on intègre alors le long d'un contour fermé, contenant le point x, on a, en vertu de (25) et (26),

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = F(x)\frac{d^k\Phi_n}{dx^k} &+ \frac{2n+k+1}{n+k-1}\frac{dF}{dx}\frac{d^{k-1}\Phi_n}{dx^{k-1}} + \ldots \\ &+ \frac{1}{n+k+p}\left[\frac{n+k}{1.2.3\ldots p} + \frac{n+1}{1.2.3\ldots(p-1)}\right]\frac{d^pF}{dx^p}\frac{d^{k-p}\Phi_n}{dx^{k-p}} + \ldots: \end{aligned} \right.$$

telle est l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfait la fonction Φ_n. Il est clair que Φ_n n'est qu'une solution particulière; mais la méthode même qui nous a conduit à l'équation (28) permet d'en découvrir toutes les solutions; en effet, si, au lieu d'intégrer la formule (27) le long d'un contour fermé, on l'intègre entre les limites a_i et a_j, et que l'on pose

$$(29) \qquad \int_{a_i}^{a_j} \frac{F^n(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} = \Phi_n^{i,j}(x),$$

la fonction $\Phi_n^{i,j}$ satisfera encore à l'équation (28). Cette équation (28) admet donc comme solutions particulières les fonctions Φ_n et $\Phi_n^{1,2}$, $\Phi_n^{1,3}, \ldots, \Phi_n^{k-1,k}$, lesquelles se réduisent évidemment à k distinctes. Ainsi,

en appelant $C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$ des constantes, la solution générale de (28) sera

$$C_0 \frac{d^k F^n}{dx^k} + C_1 \int_{a_1}^{a_2} \frac{F^n(z)}{(z-x)^{n+1}} dz + \ldots + C_{k-1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{F^n(z)}{(z-x)^{n-1}} dz.$$

La fonction $\Phi_n^{i,j}$ est susceptible d'une autre expression; il suffit pour la trouver d'intégrer par parties la formule (29); on a alors

$$\Phi_n^{i,j}(x) = \int_{a_i}^{a_j} \frac{\Psi_n(z)\,dz}{z-x}.$$

N. B. — M. Berard, commissaire des poudres et salpêtres, avait observé, dès 1863, que le radical $\sqrt{1-2xz+z^2}$ était développable en série convergente à l'intérieur d'une ellipse.

De la propagation des marées dans les rivières.

Traduit et extrait des *Tides and Waves* de M. Airy, Astronome royal d'Angleterre, Associé étranger de l'Académie des Sciences (Institut de France);

Par M. Paul GUIEYSSE,

Ingénieur hydrographe de la Marine, Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. M. Airy a publié, dans le cinquième volume de l'*Encyclopedia metropolitana* [*], un Mémoire intitulé *Tides and Waves* (Marées et Vagues), qui contient une théorie complétement nouvelle de ces phénomènes, théorie que nous croyons très-peu connue en France et même à l'étranger, d'après les recherches que nous avons faites sur cette question, et qui lui a permis de pousser les résultats théoriques beaucoup plus loin que ne le permet la théorie statique de Newton ou la théorie dynamique de Laplace, surtout au point de vue de l'influence des fonds et de la forme des côtes sur les marées locales. Nous en extrayons la partie relative à la propagation des marées dans les rivières, qui contient des éléments propres à apprécier l'influence sur le régime de la portion maritime des fleuves, des travaux faits ou à faire pour en améliorer le cours.

2. Un observateur placé sur le bord d'une rivière à marée constaterait les phénomènes suivants : dans le cours d'une des deux marées qui se produisent à peu près dans les vingt-quatre heures, l'eau de la mer produit une élévation jusqu'à une certaine distance de l'embouchure, accompagnée d'un courant dit *de flot*, qui généralement persiste quelque temps après la haute mer, et s'abaisse en formant un courant dit *de jusant*, qui dure aussi quelque temps après la basse mer. La durée de la *baissée* est plus grande que celle de la *montée;* cette différence varie suivant les stations d'observation le long de la rivière; elle est presque

[*] Londres, 1845.

nulle à l'embouchure, où les courants de flot et de jusant persistent longtemps après la haute et la basse mer (trois heures à l'entrée de la Tamise), et elle augmente à mesure que l'on remonte en rivière, tandis que l'heure de la renverse du courant se rapproche de plus en plus de celle de la phase correspondante de la marée. La courte durée du flot dans la partie haute de la rivière est une des causes des barres ou mascarets que l'on observe quelquefois, et produit aussi, mais assez rarement, deux et même trois ondes de marées distinctes; mais ceci s'observe beaucoup plus fréquemment pendant la baissée, à cause de sa longue durée. Nous verrons que ce phénomène devrait théoriquement se présenter partout, mais il arrive le plus souvent que les ondes secondaires sont beaucoup trop faibles pour être observées facilement. Enfin les marées sont plus hautes au fond des estuaires qu'en pleine mer; mais, quand la marée est réellement entrée en rivière, sa hauteur va en diminuant, et le courant de jusant, même en ne tenant pas compte du courant propre de la rivière, est plus fort que le courant de flot.

Ce phénomène de la marée ne consiste pas en un apport de la masse des eaux de la mer dans la rivière : la vitesse de propagation des différentes phases le prouve; mais, du reste, l'expérience directe le montre, puisqu'un flotteur à la surface d'une mer agitée ne possède qu'un très-faible mouvement de translation, tandis que les vagues courent avec une grande vitesse; le mouvement apparent que l'on observe n'est que le mouvement d'une forme, et l'on sait, par la théorie des divers mouvements ondulatoires, que des mouvements très-petits des molécules produisent un mouvement continu de l'onde dans une même direction; en particulier, le mouvement des vagues sur la surface de la mer est le résultat de petits mouvements des molécules d'eau qui passent successivement à la crête ou au creux des vagues avec des vitesses en avant ou en arrière, selon qu'elles sont au-dessus ou au-dessous de leur hauteur moyenne. (*Voir* n° **8**.)

5. Chaque molécule d'eau est donc animée d'un petit mouvement horizontal et vertical; si nous comptons alors les abscisses dans le sens de la longueur du canal, à partir d'un point fixe, et les ordonnées dans le sens vertical, à partir d'un certain plan horizontal, en

appelant x, y les ordonnées d'une molécule à l'état de repos et x', y' ces mêmes ordonnées quand le canal est traversé par une vague, nous aurons la relation

$$(1) \qquad x' = x + X, \quad y' = y + Y,$$

où X et Y sont des fonctions de x, y et t (le temps t est compté à partir d'une certaine époque arbitraire).

Le caractère de la vague, c'est qu'une molécule, dont l'abscisse est $x + vt'$ (v étant la vitesse de la vague), aura le même mouvement, au bout du temps $t + t'$, que la molécule dont l'abscisse est x au bout du temps t, ce que nous pouvons exprimer par

$$X = \varphi(x, t) = \varphi(x + vt', t + t');$$

d'où, en développant et nous arrêtant à la première puissance de t', nous avons l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{d\varphi(x, t)vt'}{dx} + \frac{d\varphi(x, t)t'}{dt} = 0,$$

dont la solution générale est

$$\varphi(x, t) = \psi(vt - x)$$

ou, en posant

$$(2) \qquad v = \frac{m}{n},$$

$$(3) \qquad X = \varphi(x, t) = \chi(nt - mx),$$

où φ et χ sont des fonctions arbitraires variant suivant la question, et m et n des constantes.

Nous exprimerons que les molécules d'une même ordonnée verticale ont des déplacements horizontaux différents en prenant

$$(4) \qquad X = P\chi_1(nt - mx),$$

P étant une fonction de y, et que ces déplacements en outre ne sont

pas simultanés, en prenant

$$X = P\chi_2(nt - mx - Q), \tag{5}$$

Q étant encore une fonction de y seul.

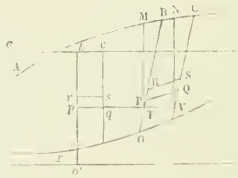
Dans ce qui suit, nous ne nous occuperons que de mouvements oscillatoires, et l'on sait que de pareils mouvements peuvent toujours se représenter par une somme de termes en sinus ou cosinus : la forme la plus générale d'un des termes de X sera donc

$$X = P\cos(nt - mx - Q). \tag{6}$$

Nous ne nous sommes occupé encore que de la fonction X : c'est que, dans chacun des problèmes que nous traiterons, la fonction Y s'en déduit au moyen d'une équation mettant en évidence une des propriétés fondamentales des liquides, la *continuité;* une autre équation, basée sur l'égalité des pressions en tous sens, nous donnera une relation entre les forces agissantes et les déplacements.

4. *Des vagues dans lesquelles les déplacements des molécules sont très-petits.*

(*a*) *Équation de continuité.* — Soient oO une section longitudinale faite dans le fond d'un canal de largeur uniforme, *abc* et ABC les sur-



faces de l'eau à l'état de repos et de mouvement; supposons l'eau divisée en colonnes verticales élémentaires, puis en tranches horizontales minces, et soient

OBC et PS ce que deviennent *obc* et *ps* au bout du temps t ;

x et y les coordonnées du point p;
$x' = x + X$ et $y' = y + Y$ celles du point P;
$pq = h$, $pr = l$ et $bo' = k$ la profondeur du canal à l'état de repos.

Les coordonnées du point S sont

$$x + h + X + \frac{dX}{dx} h \quad \text{et} \quad y + l + Y + \frac{dY}{dy} l;$$

et comme, en vertu de la continuité, les aires ps et PS sont égales, nous aurons, aux infiniment petits du second ordre près,

$$hl = h\left(1 + \frac{dX}{dx}\right) l\left(1 + \frac{dY}{dy}\right),$$

d'où

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} = 0$$

et, en intégrant,

$$Y = -\int \frac{dX}{dx} dy + f(x),$$

l'intégration commençant du fond du canal; ou, si nous appelons Ξ la valeur de X pour le fond du canal au point o, et η l'ordonnée de ce point, nous aurons évidemment $\Xi \frac{d\eta}{dx}$ pour la valeur correspondante de Y : l'*équation de continuité* est donc

$$(a) \qquad Y = \Xi \frac{d\eta}{dx} - \int_\eta^y \frac{dX}{dx} dy.$$

Dans le cas d'une profondeur uniforme, en comptant les ordonnées à partir du fond du canal, elle devient

$$(a') \qquad Y = -\int_0^y \frac{dX}{dx} dy.$$

(*b*) *Équation du mouvement.* — Soit K la valeur de Y pour un point de la surface : prolongeons pq en TV, et considérons la colonne TMNV; les longueurs TM et TB, VN et VC ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre; nous pouvons donc prendre les points M et N

au lieu de B et C dans l'évaluation correspondante de K. Soient maintenant p la pression en un point, mesurée par l'accélération qu'elle produit en agissant sur l'unité de volume par l'unité de surface, et g' l'accélération variable de la pesanteur : deux éléments de TM, égaux à l'unité de surface et ayant pour ordonnées y' et $y' + dy'$, supporteront des pressions en sens inverse p et $p + \frac{dp}{dy'} dy'$, dont la différence, agissant sur une colonne de hauteur dy', produira une accélération $\frac{dp}{dy'}$ qui s'ajoutera à celle variable de la pesanteur; nous aurons donc

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = -\frac{dp}{dy'} - g'$$

ou, comme $y' = y + Y$ et que y est indépendant de t,

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -\frac{dp}{dy'} - g',$$

d'où

$$p = -\int g' dy' - \int \frac{d^2 Y}{dt^2} dy'.$$

Pour avoir la pression jusqu'à la surface, nous devons intégrer de $y' = y$ à $y' = k + K$; mais, comme $\frac{d^2 Y}{dt^2}$ est une quantité très-petite, nous pourrons, dans les limites de notre approximation, faire la seconde intégrale par rapport à y au lieu de y' et prendre k au lieu de $k + K$ pour limite supérieure; nous aurons donc, pour la pression en T, celle à la surface étant nulle,

$$p = g'(k + K - y) + \int_y^k \frac{d^2 Y}{dt^2} dy.$$

Si maintenant nous considérons l'élément de longueur $TV = h'$, les pressions sur ses faces extérieures sont, en vertu de la transmission des pressions en tous sens, p et $\frac{dp}{dx} h'$; nous avons donc, comme précédemment, et en appelant F l'accélération due aux forces extérieures que

nous supposons horizontales [*],

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \mathrm{F} - \frac{dp}{dx}$$

ou

$$(b) \qquad \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \mathrm{F} - \frac{d}{dx}\left[g'(k + \mathrm{K} - y) + \int_y^k \frac{d^2\mathrm{Y}}{dt}\,dy\right].$$

Cette équation, jointe à l'équation (a), contient la théorie complète du mouvement de l'eau dans un canal de largeur uniforme et de profondeur variable : elles nous permettent de déterminer la force nécessaire pour entretenir un mouvement donné X, ou de trouver les mouvements X et Y produits par une force horizontale donnée F; dans le cas le plus général, où la pesanteur peut être considérée comme constante, l'équation (b) devient

$$(b') \qquad \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \mathrm{F} - \frac{d}{dx}\left(g\mathrm{K} + \int_y^k \frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}\,dy\right).$$

Ces équations sont générales, quels que soient les mouvements horizontaux et verticaux, pourvu qu'ils soient petits; dans le cas, où nous resterons désormais, d'un mouvement oscillatoire, X étant de la forme $\mathrm{A}\cos(nt - \mathrm{B})$, où A et B sont des fonctions quelconques de x et y, et Y étant nécessairement de la même forme d'après l'équation de continuité, l'équation du mouvement devient

$$n^2\mathrm{X} = -\mathrm{F} + \frac{d}{dx}\left(g\mathrm{K} - n^2\int_y^k \mathrm{Y}\,dy\right).$$

5. Quand les forces qui ont donné naissance à un mouvement oscillatoire viennent à cesser brusquement, un nouvel état oscillatoire a lieu. Nous allons rechercher s'il est possible qu'il se maintienne dans un canal de largeur uniforme et de profondeur variable; nous pren-

---

[*] Nous verrons (**17**) que, dans la question des marées, nous n'avons besoin que de considérer la composante horizontale des forces; dans le cas, plus général, où les forces ont une composante verticale, celle-ci s'ajoute à g' dans l'équation (b).

drons pour cela les équations

$$(1) \qquad Y = \Xi \frac{d\eta}{dx} - \int_\eta^y \frac{dX}{dx} dy$$

et

$$n^2 X = \frac{d}{dx}\left(g K - n^2 \int_y^k Y dy\right)$$

ou

$$(2) \qquad n^2 X = g \frac{dK}{dx} - n^2 \int_y^k \frac{dY}{dx} dy,$$

puisque les limites de l'intégrale sont indépendantes de x; différentiant l'équation (1) successivement par rapport à y et x et l'équation (2) par rapport à x et y, nous avons, en égalant les valeurs de $\frac{d^2 Y}{dx.dy}$ qui s'en déduisent,

$$(3) \qquad \frac{d^2 X}{dy^2} + \frac{d^2 X}{dx^2} = 0,$$

équation aux différentielles partielles dont la solution générale est

$$(4) \qquad X = \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \psi(x - y\sqrt{-1}),$$

où φ et ψ sont des fonctions arbitraires, ou

$$X = \chi(x + y\sqrt{-1}) + \chi(x - y\sqrt{-1})$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\omega(y + x\sqrt{-1}) - \omega(x - y\sqrt{-1})\right],$$

χ et ω ne contenant dans leur forme aucune imaginaire. Il nous reste à voir si nous pouvons déterminer ces fonctions de manière à satisfaire à l'équation (2), dans laquelle nous aurons remplacé Y par sa valeur tirée de l'équation (1); il nous suffit de considérer un seul des termes de X, un calcul identique s'appliquant à l'autre, et nous poserons

$$X = \nu'(y + x\sqrt{-1}) + \nu'(x - y\sqrt{-1}),$$

en considérant ν' comme la dérivée d'une fonction ν; en formant donc

chacune des quantités $\int \frac{dX}{dx}$, Ξ pour avoir Y, puis $\frac{dK}{dx}$ et $\int \frac{dY}{dx}\,dy$ pour avoir X, nous aurons, après réductions,

$$\begin{aligned}(n^2K - n^2 y - g)\frac{d^2}{dx^2}\left[v\left(\eta + x\sqrt{-1}\right) + v\left(\eta - x\sqrt{-1}\right)\right]\\ - g\left[v''\left(K + x\sqrt{-1}\right) + v''\left(K - x\sqrt{-1}\right)\right]\\ + n^2\left[v'\left(K + x\sqrt{-1}\right) + v'\left(K - x\sqrt{-1}\right)\right] = 0;\end{aligned}$$

x et y étant des variables indépendantes, cette équation nécessite les deux suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}\left[v\left(\eta + x\sqrt{-1}\right) + v\left(\eta - x\sqrt{-1}\right)\right] = 0,\\ &g\left[v''\left(K + x\sqrt{-1}\right) + v''\left(K - x\sqrt{-1}\right)\right]\\ &- n^2\left[v'\left(K + x\sqrt{-1}\right) + v'\left(K - x\sqrt{-1}\right)\right] = 0.\end{aligned}\right.$$

La première nous montre que, lorsque η est variable ou fonction de x, il n'est pas possible d'y satisfaire par une fonction quelconque de v; le mouvement oscillatoire que nous avons supposé ne peut exister, et donnera naissance à des *brisants* au lieu de vagues continues.

Des mouvements ondulatoires soustraits à l'action des forces extérieures.

6. *Des vagues dans un canal de largeur et de profondeur constantes.* — Nous sommes donc conduits, par ce qui précède, quand il n'y a plus de forces extérieures, à considérer le mouvement ondulatoire dans un canal de profondeur constante; nous allons étudier les diverses circonstances de ce mouvement.

Nos équations sont

$$(1)\qquad Y = -\int_0^y \frac{dX}{dx}\,dy,$$

$$(2)\qquad n^2 X = g\frac{dK}{dx} + n^2\int_k^y \frac{dY}{dx}\,dy,$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{d^2X}{dy^2} + \frac{d^2X}{dx^2} = 0.$$

Nous supposons un mouvement uniforme oscillatoire, et nous prendrons X de la forme

$$(4) \qquad X = P\cos(nt - mx - Q),$$

où P et Q sont des fonctions de y. La substitution de X dans nos équations nous permettra, tout en déterminant ces fonctions, de vérifier l'exactitude de notre hypothèse.

Si nous posons $P\cos Q = R$ et $P\sin Q = S$, nous aurons

$$X = R\cos(nt - mx) + S\sin(nt - mx)$$

et, substituant dans (3),

$$\frac{d^2R}{dy^2} - m^2R = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2S}{dy^2} - m^2S = 0,$$

d'où

$$R = Ce^{my} + De^{-my} \quad \text{et} \quad S = C'e^{my} + D'e^{-my},$$

C, C', D et D' désignant des constantes ; nous aurons donc pour X

$$(5) \quad X = (Ce^{my} + De^{-my})\cos(nt - mx) + (C'e^{my} + D'e^{-my})\sin(nt - mx);$$

nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned}
Y = &-(Ce^{my} - De^{-my} - C + D)\sin(nt - mx) \\
&+ (C'e^{my} - D'e^{-my} - C' + D')\cos(nt - mx), \\
K = &-(Ce^{mk} - De^{-mk} - C + D)\sin(nt - mx) \\
&+ (C'e^{mk} - D'e^{-mk} - C' + D')\cos(nt - mx), \\
\frac{dY}{dx} = &\quad m(Ce^{my} - De^{-my} - C + D)\cos(nt - mx) \\
&+ m(C'e^{my} - D'e^{-my} - C' + D')\sin(nt - mx), \\
\int_y^k \frac{dY}{dx}\,dy = &-[Ce^{my} + De^{-my} - Ce^{mk} - De^{-mk} \\
&\qquad + m(y - k) - C + D]\cos(nt - mx) \\
&-[C'e^{my} + D'e^{-my} - C'e^{mk} - D'e^{-mk} \\
&\qquad + m(y - k) - C' + D']\sin(nt - mx),
\end{aligned}$$

et, substituant dans l'équation (2), nous avons

$$\begin{aligned}
& n^2(Ce^{my}+De^{-my})\cos(nt-mx)+n^2(C'e^{my}+D'e^{-my})\sin(nt-mx)\\
= \quad & mg(Ce^{mk}-De^{-mk}-C+D)\cos(nt-mx)\\
& +mg(C'e^{mk}-D'e^{-mk}-C'+D')\sin(nt-mx)\\
& +n^2[Ce^{my}+De^{-my}-Ce^{mk}-De^{-mk}+m(y-k)-C+D]\cos(nt-mx)\\
& +n^2[C'e^{my}+D'e^{-my}-C'e^{mk}-D'e^{-mk}+m(y-k)-C'+D']\sin(nt-mx);
\end{aligned}$$

réduisant et égalant séparément à zéro les coefficients de $\cos(nt-mx)$ et $\sin(nt-mx)$, en remarquant que y est indépendant de k, nous obtenons

$$D=C \quad \text{et} \quad D'=C'$$

et

$$\begin{aligned}
mg\,C(e^{mk}-e^{-mk})+n^2C(e^{mk}+e^{-mk})&=0,\\
mg\,C'(e^{mk}-e^{-mk})+n^2C'(e^{mk}+e^{-mk})&=0,
\end{aligned}$$

équations qui ne déterminent que $\frac{C}{C'}$ et exigent, pour être compatibles, la relation

$$n^2=mg\,\frac{e^{mk}-e^{-mk}}{e^{mk}+e^{-mk}}. \tag{6}$$

L'équation (5) devient

$$X=(e^{my}+e^{-my})[C\cos(nt-mx)+C'\sin(nt+mx)]$$

ou, en posant $A=\sqrt{C^2+C'^2}$ et $\operatorname{tang}B=\frac{C}{C'}$,

$$X=A(e^{my}+e^{-my})\cos(nt-mx-B), \tag{7}$$

d'où l'on déduit

$$Y=-A(e^{my}-e^{-my})\sin(nt-mx-B).$$

Ces expressions nous montrent la simultanéité du mouvement des molécules situées primitivement sur une même verticale, et nous permettent, par un changement de l'origine du temps, de faire disparaître

la constante B. Nous avons donc finalement, pour les composantes des déplacements du mouvement ondulatoire,

$$X = A(e^{my} + e^{-my})\cos(nt - mx) \tag{8}$$

et

$$Y = -A(e^{my} - e^{-my})\sin(nt - mx),$$

où A est une constante et où m et n sont liées par la relation (6). $nt - mx$ est ce que l'on appelle la *phase* de la vague; nous voyons que X et Y ne changent pas quand nt et mx varient respectivement d'un multiple pair de 2π; le mouvement est donc le même au même instant en des points distants de $\frac{2\pi}{m}$, et repasse en un même point par la même valeur, à des intervalles de temps $\frac{2\pi}{n}$.

$\frac{2\pi}{m} = \lambda$ est la *longueur* ou *amplitude* de la vague.

$\frac{2\pi}{n} = \tau$ est sa *période*.

Sa *vitesse* est donnée par $\frac{n}{m}$ (5) ou $\frac{\lambda}{\tau}$, et, en tenant compte de (6), elle est

$$v = \sqrt{\frac{g(e^{mk} - e^{-mk})}{m(e^{mk} + e^{-mk})}};$$

pour une profondeur donnée, elle varie avec la largeur et la période de la vague, et, pour une largeur ou une période donnée, elle varie avec la profondeur.

7. Les vagues que nous rencontrons le plus souvent dans la nature sont de deux sortes, ou des vagues très-courtes par rapport à la profondeur de l'eau, comme celles qui animent la surface de la mer ou des rivières, ou des vagues très-longues, appelées *vagues-marées* (*voir* n° **17**), dont la période est liée au mouvement des astres, et qui produisent les marées dans les rivières et les canaux resserrés.

La relation (6) peut s'écrire

$$v^2 = \frac{2\pi\lambda}{g}\,\frac{e^{\frac{4\pi k}{\lambda}} + 1}{e^{\frac{4\pi k}{\lambda}} - 1}.$$

Dans les vagues ordinaires, où λ est très-petit, $\tau^2 = \frac{2\pi\lambda}{g}$ et $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$; la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la longueur.

Dans les vagues-marées, $\tau^2 = \frac{\lambda^2}{gh}$ et $v = \sqrt{gh}$; la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la profondeur.

Nous voyons aussi, d'après les équations (8), que les plus grands déplacements horizontaux et verticaux d'une molécule sont $A(e^{my} + e^{-my})$ et $A(e^{my} - e^{-my})$, ou sont proportionnels à $e^{\frac{2\pi}{\lambda}y} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}$ et à $e^{\frac{2\pi}{\lambda}y} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}$. Au fond de l'eau $Y = 0$ et $X = 2A$; dans les lames courtes, les déplacements horizontaux et verticaux sont à peu près égaux, excepté près du fond, et insensibles par rapport à ceux de la surface, à partir d'une certaine profondeur; à une profondeur simplement égale à λ, ce rapport est de $\frac{1}{535}$.

Dans les vagues-marées, au contraire, le déplacement horizontal est à très-peu près le même au fond et à la surface; le déplacement vertical varie comme la hauteur et est beaucoup plus faible que l'horizontal, puisque leur rapport, pour une assez grande valeur de λ, est $\frac{4\pi k}{2\lambda}$.

8. Les valeurs de X et Y peuvent s'écrire

$$X = A\left(e^{\frac{2\pi}{\lambda}y} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}\right)\cos(nt - mx) = C\cos(nt - mx),$$

$$Y = -A\left(e^{\frac{2\pi}{\lambda}y} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}\right)\sin(nt - mx) = -C'\cos(nt - mx);$$

la courbe décrite par un point quelconque x, y est donc

$$\frac{X^2}{C^2} + \frac{Y^2}{C'^2} = 1,$$

équation d'une ellipse ayant pour centre le point considéré, qui est très-allongée dans le cas de la vague-marée, et qui devient un cercle dans les vagues assez courtes pour qu'on puisse négliger $e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}$; dans ce

dernier cas, en appelant θ l'inclinaison d'un rayon quelconque,

$$\operatorname{tang}\theta = -\cot(nt - mx) \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + nt - mx;$$

donc les molécules se meuvent uniformément autour de leur position de repos, ayant leur plus grande vitesse en avant ou en arrière quand elles sont au point le plus haut ou le plus bas de la circonférence; nous avons du reste, en général,

$$\frac{dX}{dt} = -nC\sin(nt - mx) = n\frac{C}{C'}Y;$$

la vitesse horizontale a sa plus grande valeur absolue au moment de la haute ou de la basse mer, et est nulle à mi-marée, ou quand l'eau est à son niveau moyen.

9. Reprenons les équations (1) et (2); puisque nous les avons satisfaites par le groupe des valeurs (8), nous les satisferons également par le groupe des valeurs

$$(9) \qquad \begin{cases} X = A(e^{my} + e^{-my})\cos(nt + mx), \\ Y = -A(e^{my} - e^{-my})\sin(nt + mx), \end{cases}$$

qui correspondent à une vague égale à la première, mais parcourant le canal avec une vitesse égale et de sens contraire.

De plus, d'après la forme de nos équations différentielles, si nous les satisfaisons par un certain nombre de fonctions X', X'', X''',..., Y', Y'', Y''',..., nous les satisferons également par une combinaison linéaire quelconque de ces fonctions; nous voyons donc que des vagues en nombre quelconque peuvent exister sur une surface liquide, et que la dépression ou l'élévation de l'eau sera la résultante arithmétique des dépressions ou élévations partielles.

Prenons, par exemple, les vagues représentées par les équations (8) et (9), et supposons-les exister simultanément : nous aurons

$$(10) \qquad \begin{cases} X = 2A(e^{my} + e^{-my})\cos nt\cos mx, \\ Y = 2A(e^{my} - e^{-my})\cos nt\sin mx. \end{cases}$$

Puisqu'il n'y a pas de terme en $nt - mx$, l'eau est animée d'un mou-

vement ondulatoire et stationnaire; pour un point donné, le rapport $\frac{X}{Y}$ est constant; donc chaque molécule se meut en ligne droite, le maximum de X a lieu pour les points où mx est un multiple de $\frac{\pi}{2}$, et Y y est nul; celui de Y a lieu pour ceux où mx est un multiple de π, et X y est nul.

Théorie des longues vagues quand la profondeur du canal est sensiblement modifiée par l'élévation de la marée.

Le phénomène dont nous allons étudier les lois est des plus importants et se présente journellement dans toutes les rivières où la marée se fait sentir.

10. Nous allons d'abord supposer que *la largeur est uniforme* et *la profondeur constante,* et que le canal n'a pas de courant vers la mer. Nous venons de voir (n° **7**) que, pour la *vague-marée,* le déplacement vertical est extrêmement petit par rapport à l'horizontal, et par suite négligeable, et que toutes les molécules d'eau d'une même file verticale ont des déplacements horizontaux égaux, de sorte que, pour l'estimation de la pression en un point, nous n'avons à tenir compte que de la hauteur de la colonne d'eau au-dessus de ce point; nous allons établir les équations de *continuité* et de *mouvement* d'après ces nouvelles conditions, et nous pourrons pousser plus loin l'étude de la question.

(*a*) *Équation de continuité.* — Soient x et $x+h$ les abscisses de deux files verticales de molécules, et k la profondeur de l'eau au repos; au bout du temps t la distance des deux files sera

$$h\left(1+\frac{dX}{dx}\right),$$

et k sera devenu

$$V = k + K,$$

d'où

$$hk = h\left(1+\frac{dX}{dx}\right)V,$$

et

$$V = \frac{k}{1 + \frac{dX}{dx}} \tag{1}$$

pour la relation cherchée.

(*b*) *Équation du mouvement.* — Les colonnes d'eau agissant sur les points dont les coordonnées sont y et $x + X$ et y et $x + X + h'\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)$ ont pour hauteur $V - y$ et $V + h'\frac{dV}{dx} - y$; donc l'élément horizontal de longueur $h'\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)$ est soumis à une pression $-gh'\frac{dV}{dx}$; nous avons alors, pour notre équation, en remarquant que x est indépendant de t,

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -g\frac{dV}{dx}\frac{1}{1 + \frac{dX}{dx}}$$

ou, en vertu de (1),

$$\frac{d^2X}{dt^2} = gk\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)^3}. \tag{2}$$

Nous résoudrons cette équation, qui nous donne la solution du problème, par approximations successives, pour les vagues-marées, $v^2 = gk$; développant le dénominateur, nous obtenons

$$\frac{d^2X}{dt^2} - v^2\frac{d^2X}{dx^2} = v^2\frac{d^2X}{dx^2}\left[-3\frac{dX}{dx} + 6\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{3}$$

Première approximation. — En négligeant le deuxième membre, nous avons simplement

$$\frac{d^2X}{dt^2} - v^2\frac{d^2X}{dx^2} = 0,$$

équation bien connue, que l'on résout en posant $vt - x = u$, et $vt + x = w$, d'où

$$\frac{d^2X}{du.dw} = 0, \quad \frac{dX}{dw} = \psi'(w) \quad \text{et} \quad X = \varphi(u) + \psi(w)$$

ou

$$X = \varphi(vt - x) + \psi(vt + x),$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires à déterminer, d'après les conditions du problème; or $\psi(vt+x)$ représente une vague se mouvant en arrière, et, comme nous n'en observons pas dans le phénomène en question, nous n'aurons pas de terme de ce genre dans X; de plus, la théorie des marées nous apprend qu'à l'embouchure d'une rivière, en mer libre, le mouvement de l'eau ne dépend que de termes de la forme $\cos(nt+A)$, où n et A sont des quantités indépendantes du temps; nous prendrons donc X de la forme $a\cos(nt-mx-A)$ ou, en déplaçant l'origine du temps et nous rappelant que $v=\frac{n}{m}$ (3),

$$X = a\cos(mvt - mx). \tag{4}$$

X pourra d'ailleurs se composer d'une somme de termes en sinus ou cosinus de $(mvt-mx)$, dont chacun se traitera de la même manière.

Seconde approximation. — Substituant dans le second membre de (3) les valeurs de $\frac{dX}{dx}$ et $\frac{d^2X}{dx^2}$ déduites de (4) et nous bornant au premier terme, nous avons

$$\frac{d^2X}{dt^2} - v^2\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{3}{2}a^2v^2m^3\sin(2mvt-2mx).$$

En traitant cette équation comme la précédente, nous aurons pour solution

$$X = \varphi(vt-x) + \psi(vt+x) - \frac{3}{16}a^2m^2(vt+x)\cos(2mvt-2mx);$$

les fonctions φ et ψ doivent être choisies de manière que X satisfasse aux lois de la marée à l'embouchure et contienne le même terme en a que la première valeur approchée; il faut donc détruire le terme $vt\cos(2mvt-2mx)$, qui impliquerait une marée croissant constamment avec le temps; nous poserons donc

$$\begin{aligned}\varphi(vt-x)&+\psi(vt+x)\\ &= a\cos(mvt-mx) + \frac{3}{16}a^2m^2(vt-x)\cos(2mvt-2mx)\\ &\quad + ca^2\cos(2mvt-2mx) + c'a^2\sin(2mvt-2mx);\end{aligned}$$

d'où

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} X = a\cos(mvt - mx) - \frac{3}{8}a^2m^2x\cos(2mvt - 2mx) \\ + ca^2\cos(mvt - 2mx) + c'a^2\sin(2mvt - 2mx),\end{aligned}\right.$$

où c et c' vont être déterminés d'après la loi de la marée à l'embouchure. Portons la valeur de $\frac{dX}{dx}$, déduite de (5) dans l'expression de V; développons le dénominateur, en nous arrêtant aux termes en a^2, et remplaçons les puissances des lignes trigonométriques par leurs valeurs en fonction des multiples de ces arcs; nous aurons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} V = k\Big[1 - am\sin(mvt - mx) + \frac{a^2m^2}{2} \\ + \frac{3}{4}a^2m^3x\sin(2mvt - 2mx) - 2a^2mc\sin(2mvt - 2mx) \\ + a^2\left(2mc' - \frac{m^2}{8}\right)\cos(2mvt - 2mx\Big];\end{aligned}\right.$$

c'est la hauteur de l'eau à l'endroit où se trouvent actuellement les molécules dont l'abscisse était primitivement x; si nous voulons cette hauteur pour les points dont l'abscisse actuelle est x', nous remarquerons que $x' = x + X$; d'où, en nous bornant à la première approximation,

$$x = x' - X' = x' - a\cos(mvt - mx').$$

Substituant dans (6), le terme en a devient

$$\begin{aligned} &\sin[mvt - mx' + ma\cos(mvt - mx')] \\ &= \sin(mvt - mx') + \frac{ma}{2} + \frac{ma}{2}\cos(2mvt - 2mx');\end{aligned}$$

les termes en a^2 ne changent pas avec notre degré d'approximation, et nous avons

$$\begin{aligned} V = k\Big[1 - am\sin(mvt - mx') \\ + \frac{3}{4}a^2m^3x'\sin(2mvt - 2mx') - 2a^2mc\sin(2mvt - 2mx') \\ + a^2\left(2mc' - \frac{5m^2}{8}\right)\cos(2mvt - 2m'x)\Big].\end{aligned}$$

Prenons pour origine des abscisses le point où le canal débouche en mer; d'après les lois de la marée, V ne peut dépendre que de $\sin mvt$; donc, pour $x' = 0$, les termes en $(2mvt - 2mx)$ doivent disparaître, ce qui nous donne

$$c = 0 \quad \text{et} \quad c' = -\frac{5m}{16},$$

et la valeur de V devient, en posant $am = b$,

$$(7) \quad V = k\left[1 - b\sin(mvt - mx') + \frac{3}{4}b^2 mx' \sin(2mvt - 2mx')\right];$$

d'où, pour l'élévation au-dessus du niveau moyen,

$$(8) \quad K = -bk\sin(mvt - mx') + \frac{3}{4}b^2 mx' \sin(2mvt - 2mx').$$

Le premier terme est semblable à celui que nous avons trouvé (6); le second terme, entièrement différent, contient un facteur x' en dehors de la fonction périodique : on peut le considérer comme représentant une vague dont la longueur augmente à mesure qu'elle remonte le canal.

Si l'on construit les courbes représentées par (8), en prenant K pour ordonnée et successivement x' et t comme abscisses, on obtient la forme de l'onde à un moment donné, et la loi de la marée en un point donné; ces courbes mettent très-bien en évidence les faits énoncés au n° 2.

11. Nous pouvons, du reste, calculer le temps de la montée et de la baissée; l'expression de K peut s'écrire

$$-bk\left[\sin(mvt - mx') - \cos(mvt - mx')\frac{3}{2}bmx'\sin(mvt - mx')\right],$$

ou, le second terme étant petit par rapport au premier,

$$K = -bk\sin\left[mvt - mx' - \frac{3}{2}bmx'\sin(mvt - mx')\right].$$

Les phases de la basse mer s'obtiendront en donnant au sinus sa

plus grande valeur positive, ou en faisant

$$mvt - mx' - \frac{3}{2} bmx' \sin(mvt - mx') = 2q\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Prenons comme première approximation

$$mvt - mx' = 2q\pi + \frac{\pi}{2},$$

substituant,

$$mvt - mx' - \frac{3}{2} bmx' = \frac{\pi}{2},$$

d'où, pour les mers basses successives,

$$t_1 = \frac{1}{mv}\left(\frac{\pi}{2} + mx' + \frac{3}{2} bmx'\right),$$

$$t_2 = \frac{1}{mv}\left(\frac{5\pi}{2} + mx' + \frac{3}{2} bmx'\right), \ldots;$$

nous aurons de même, pour les mers hautes,

$$t'_1 = \frac{1}{mv}\left(\frac{3\pi}{2} + mx' - \frac{3}{2} bmx'\right),$$

$$t'_2 = \frac{1}{mv}\left(\frac{7\pi}{2} + mx' - \frac{3}{2} bmx'\right), \ldots,$$

d'où, pour l'intervalle d'une mer basse à une mer haute,

$$t'_1 - t_1 = \frac{1}{mv}(\pi - 3bmx')$$

et d'une mer haute à une mer basse

$$t_2 - t'_1 = \frac{1}{mv}(\pi + 3bmx').$$

La baissée dure donc plus que la montée de l'intervalle de temps

$\frac{6bx'}{v}$, où $\frac{x'}{v}$ est le temps employé par la vague-marée pour se propager de l'embouchure au point considéré, et b, d'après (8), est le rapport de la hauteur maximum de la marée à la profondeur moyenne.

Ainsi, en rivière, les moments de la haute et de la basse mer et la différence de la durée des phases correspondantes dépendent de la distance de la station considérée à l'embouchure et pour une même station de la grandeur de la marée, ce qu'apprend l'observation. Nous pouvons encore tirer de nos formules d'autres résultats conformes encore à l'observation; en effet, la haute mer ayant lieu au point x', au temps $\frac{1}{mv}\left(\frac{3\pi}{2} + mx' - \frac{3}{2}bmx'\right)$, a lieu au point $x' + x_1$ au temps $\frac{1}{mv}\left[\frac{3\pi}{2} + m(x' + x_1) - \frac{3}{2}bm(x' + x_1)\right]$; donc le temps employé à parcourir l'espace x_1 est $\frac{x_1}{v}\left(1 - \frac{3b}{2}\right)$, et la vitesse de propagation est approximativement $v\left(1 + \frac{3b}{2}\right)$ ou $\sqrt{gk(1 + 3b)}$; pour la vitesse de la basse mer, nous trouverions de même $\sqrt{gk(1 - 3b)}$. Or les vitesses de la vague-marée en mer libre, pour des profondeurs répondant à la haute et à la basse mer, seraient respectivement $\sqrt{gk(1 + b)}$ et $\sqrt{gk(1 - b)}$; donc la vague-marée se propage à haute mer plus rapidement que dans une mer libre de même profondeur et moins rapidement à mer basse. Quant à la vitesse du courant, nous avons, en remplaçant les constantes par leurs valeurs dans (5),

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} X = a\cos(mvt - mx) &- \frac{3}{8}a^2m^2x\cos(2mvt - 2mx) \\ &+ \frac{5}{16}ma^2\sin(2mvt - 2mx), \end{aligned}\right.$$

et

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = amv\Big[-\sin(mvt - mx) &+ \frac{3}{4}am^2x\sin(2mvt - 2mx) \\ &+ \frac{5}{8}ma\sin(2mvt - 2mx)\Big]. \end{aligned}\right.$$

Pour avoir la vitesse en x', nous y remplacerons, comme dans la va-

leur de V, x par $x' - a\cos(mvt - mx')$, et nous aurons

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta = amv\Big[& -\sin(mvt - mx') - \frac{ma}{2} + \frac{ma}{8}\cos(2mvt - 2mx') \\ & + \frac{3}{4}am^2x'\sin(2mvt - 2mx)\Big]; \end{aligned} \right.$$

à haute et à basse mer, nous avons

$$\vartheta_1 = bv\left(1 - \frac{5b}{8}\right) \quad \text{et} \quad \vartheta'_1 = -bv\left(1 + \frac{5b}{8}\right).$$

Ces valeurs répondent à très-peu près aux maxima de la vitesse dans les deux sens de la rivière, et nous vérifions que le courant de *jusant* est plus fort que le courant de *flot*.

Nous pourrions procéder à une troisième approximation, qui sera quelquefois nécessaire dans la pratique; en procédant exactement comme plus haut et en partant de la valeur (9) de X, nous obtiendrions

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} V = k\Big\{ & 1 - b\sin(mvt - mx') \\ & + \Big[\frac{3}{4}b^2\sin(2mvt - 2mx') \\ & \qquad + \frac{33}{32}b^3\cos(mvt - mx') \\ & \qquad - \frac{21}{32}b^3\cos(3mvt - 3mx')\Big]mx' \\ & + \Big[\frac{9}{32}b^3\sin(mvt - mx') \\ & \qquad - \frac{27}{32}b^3\sin(3mvt - 3mx')\Big]m^2x'^2\Big\}. \end{aligned} \right.$$

On discuterait de même les valeurs des durées de la montée et de la baissée, de la vitesse des courants de flot et de jusant; mais, les résultats de la deuxième approximation n'étant pas modifiés dans leur caractère essentiel, et représentant le phénomène que nous avions en vue avec une assez grande exactitude, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

12. Étudions maintenant les modifications apportées aux résultats précédents, si *l'eau du canal est animée vers la mer d'un courant*, dont nous représenterons par e la vitesse moyenne.

Les équations du problème resteront les mêmes qu'au n° **10**; mais, pour tenir compte des nouvelles circonstances, nous prendrons pour la première approximation

$$X = a\cos(mvt - mx) - et;$$

pour la deuxième, nous aurons encore

$$X = \varphi(vt - x) + \psi(vt + x) - \frac{3}{16}a^2m^2(vt + x)\cos(2mvt - 2mx).$$

Mais les fonctions arbitraires ne seront plus les mêmes; car, d'un côté, nous devons comprendre dans X la première valeur approchée, de l'autre, comme, au bout d'un certain temps, toutes les molécules arrivent à la mer, nous ne pouvons avoir de terme contenant le facteur x, autrement la loi de la marée à l'embouchure dépendrait de x, ce qui est impossible; elle ne peut non plus dépendre de t; nous introduirons donc un terme $f(vt - x)\cos(2mvt - 2mx)$, et nous prendrons finalement

$$(5')\quad \left\{\begin{aligned} X = {} & a\cos(mvt - mx) - et \\ & - \frac{3}{8}a^2m^2x\cos(2mvt - 2mx) + ca^2\cos(2mvt - 2mx) \\ & + c'a^2\sin(2mvt - 2mx) + f(vt - x)\cos(2mvt - mx), \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(6')\quad \left\{\begin{aligned} V = k\Big\{ 1 - {} & am\sin(mvt - mx) + \frac{a^2m^2}{2} \\ & - \left[2ca^2m + 2fmvt - \left(2fm + \frac{3}{4}a^2m^3\right)x\right] \\ & \times\sin(2mvt - 2mx) \\ & + \left(2c'a^2m + f + \frac{3}{8}a^2m^2\right)\cos(2mvt - 2mx)\Big\}. \end{aligned}\right.$$

C'est la hauteur au point dont l'abscisse primitive était x; si nous

la voulons pour le point dont l'abscisse est $x' = x + X$, nous avons, en nous bornant à la première approximation,

$$x = x' - a\cos(mvt - mx) + et$$

d'où, par approximation successive et partant de $x = x' + et$,

$$x = x' + et - a\cos(mvt - met - mx').$$

Remplaçant x par cette valeur dans (6'), en nous contentant de $x = x' + et$ pour les termes en a^2, nous avons

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned} V = k\Big(& 1 - am\sin(mvt - met - mx') \\ & + \Big\{ -2ca^2m + \Big[-2fm(v-e) + \frac{3}{4}a^2m^3e\Big]t \\ & \qquad + \Big(2fm + \frac{3}{4}a^2m^2\Big)x'\Big\} \\ & \times \sin(2mvt - 2met - 2mx') \\ & + \Big(2c'a^2m + f - \frac{5}{8}a^2m^2\Big)\cos(2mvt - 2met - 2mx')\Big). \end{aligned}\right.$$

A la mer, où $x' = 0$, la marée est représentée par

$$-kam\sin(v - e)mt,$$

d'où

$$c = 0,\quad f = \frac{3}{8}a^2m^2\frac{e}{v-e}\quad \text{et}\quad c' = \frac{5v - 8e}{v - e}\,\frac{m}{16};$$

et, en posant $am = b$, nous obtenons, pour $K = V - k$,

$$(8')\quad \left\{\begin{aligned} K = & -bk\sin(mvt - met - mx') \\ & + \frac{3}{4}b^2k\frac{v}{v-e}mx'\sin(2mvt - 2met - 2mx'). \end{aligned}\right.$$

Nous pourrions continuer, comme dans le problème précédent, l'étude des valeurs de K, ce qui sera nécessaire dans la pratique, mais le point qui offre le plus d'intérêt est celui de la durée de la *montée* et de la *baissée* de l'eau; en procédant comme au n° **11**, nous trouverions,

pour les époques successives de la basse et de la haute mer,

$$t_1 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\frac{\pi}{2} + mx' + \frac{3b}{2}\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right),$$

$$t_2 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\frac{5\pi}{2} + mx' + \frac{3b}{2}\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right);$$

et

$$t'_1 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\frac{3\pi}{2} + mx' - \frac{3b}{2}\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right),$$

$$t'_2 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\frac{7\pi}{2} + mx' - \frac{3b}{2}\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où, pour la durée de la montée,

$$t'_1 - t_1 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\pi - 3b\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right)$$

et, pour celle de la baissée,

$$t_2 - t'_1 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\pi + 3b\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right);$$

la différence est $6bx'\frac{v}{(v-e)^2}$, ou, comme $v - e = \frac{m}{n}$, $6bx'\left(\frac{m}{n} + e\frac{n^2}{n^2}\right)$; quand il n'y a pas de courant, elle est $6bx'\frac{m}{n}$.

Nous voyons donc que l'un des effets du courant est de multiplier par $\left(1 + \frac{em}{n}\right)$ la différence de la durée de la baissée et de la montée.

15. Les recherches précédentes ont supposé que le canal avait une profondeur constante dans sa section transversale; nous pouvons étudier le cas où la vague-marée se propage dans un canal dont la section transversale sera toujours constante, mais de profil quelconque.

Soit $u = \psi(y)$ l'aire de cette section jusqu'à la hauteur y (les ordonnées étant comptées du point le plus bas), de sorte que $\frac{du}{dy} = z$,

z représentant une ordonnée horizontale perpendiculaire à la direction du canal. En raisonnant absolument comme au n° **10**, et conservant les mêmes notations, nous trouvons

$$(1) \qquad \psi(V) = \frac{\psi(k)}{1 + \frac{dX}{dx}}$$

pour l'équation de continuité, et

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -g\frac{dV}{dx}\frac{1}{1 + \frac{dX}{dx}}$$

pour l'équation de mouvement; ou, en éliminant $\frac{dV}{dx}$,

$$(2) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{g\psi(k)}{\psi'(V)}\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)^3}.$$

Cette équation se résoudra, comme les équations analogues que nous avons déjà rencontrées, par approximations successives.

Comme première approximation, prenons $V = k$ et négligeons $\frac{dX}{dx}$, qui est fort petit : nous avons

$$(3) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{g\psi(k)}{\psi'(k)}\frac{d^2X}{dx^2},$$

ou, en posant $\frac{\psi(k)}{\psi'(k)} = k'$ et $v'^2 = gk'$,

$$\frac{d^2X}{dt^2} = v'^2\frac{d^2X}{dx^2},$$

dont la solution (**10**) est $X = \chi(v't - x) + \omega(v't + x)$, ce qui nous montre que la vague se propage avec la même vitesse $v' = \sqrt{gk'}$ que si le canal avait une profondeur constante, égale à $\frac{\psi(k)}{\psi'(k)}$ ou $\frac{\psi(k)}{\varphi(k)}$. Dans le cas d'une section triangulaire, par exemple, $\varphi(y) = z = ay$, et $\psi(y) = \frac{ay^2}{2}$, d'où $k' = \frac{k}{2}$, et la vitesse est la même que dans un canal

rectangulaire de hauteur égale à la moitié de celle du triangle; dans le cas d'une section parabolique, $\varphi(y) = z = \sqrt{ay}$, $\psi(y) = \frac{2}{3}\sqrt{ay^3}$ et $k' = \frac{2k}{3}$; en général, il suffit de transformer le profil quelconque donné en un rectangle de même aire et même largeur et dont la hauteur déterminera la vitesse par la relation $v = \sqrt{gh}$.

Pour une seconde approximation, nous développerons l'équation (1)

$$\psi(V) = \psi(k) + \psi'(k)(V - k) = \psi(k) - \psi(k)\frac{dX}{dx},$$

d'où

$$V - k = -\frac{\psi(k)}{\psi'(k)}\frac{dX}{dx},$$

puis

$$\psi'(V) = \psi'(k) + \psi''(k)(V - k) = \psi'(k) - \frac{\psi(k)\psi''(k)}{\psi'(k)}\frac{dX}{dx};$$

d'où, remplaçant dans (2) $\frac{\psi(k)}{\psi'(v)}$ par la valeur déduite de ces relations, nous obtenons

$$(4)\qquad \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{g\psi(k)}{\psi'(k)}\left[1 - \frac{3\psi'(k)^2 - \psi(k)\psi''(k)}{\psi'(k)^2}\frac{dX}{dx}\right]\frac{d^2X}{dx^2}.$$

Cette équation, après y avoir remplacé $\psi(k)$ et $\psi'(k)$ par leurs valeurs déterminées dans chaque cas particulier, se traitera absolument comme l'équation (3) du n° **10**. Cette discussion suppose évidemment que le mouvement dans la direction des z est insignifiant par rapport à celui dans le sens des x, et tout au plus comparable au mouvement vertical; nous ne pourrons donc appliquer ces formules que dans le cas d'une rivière ou d'un canal encaissé dans ses rives, et elles seront en défaut quand, à mer basse, la rivière se réduit à de petits bras coulant au milieu de larges bancs de sable.

Des mouvements ondulatoires sous l'action des forces extérieures.

14. *Canal de largeur constante et de profondeur variable.* — Nous avons trouvé pour les équations générales, dans le cas où nous consi-

dérons l'action des forces extérieures (4),

$$(1) \qquad Y = \Xi \frac{d\eta}{dx} - \int_\eta^y \frac{dX}{dx}\, dy,$$

et

$$(2) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = F - \frac{d}{dx}\left(gK + \int_y^k \frac{d^2Y}{dt^2}\, dy\right),$$

et nous avons vu (5) que ces équations ne pouvaient être satisfaites dans le cas d'une profondeur variable, quand la force extérieure est nulle.

Nous ne pourrons donc appliquer avec une entière exactitude les résultats que nous avons obtenus dans le cas d'une profondeur constante; mais comme, dans ce qui suit, nous supposerons que la profondeur varie lentement, nous conserverons la forme trouvée pour les déplacements, ce qui nous permettra d'apprécier encore très-exactement l'effet de la variation de profondeur d'un canal sur les circonstances générales des vagues. Nous avons trouvé (6)

$$X = A\,(e^{my} + e^{-my}) \cos(nt - mx),$$

où m et n sont reliés par la relation

$$n^2 = mg\,\frac{e^{mk} - e^{-mk}}{e^{mk} + e^{-mk}};$$

en comptant les ordonnées à partir d'un plan horizontal à une distance constante η du fond, il faudrait y changer y en $y - \eta$. Concevons notre canal divisé en sections assez petites pour que nous puissions y considérer les profondeurs comme constantes; les valeurs de X et de n^2 auront pour chacune d'elles la même forme que plus haut; nous pouvons donc raisonnablement conclure que la même chose aura lieu pour le canal entier, en y considérant η comme variable, et m comme une fonction de x (n dont dépend la période de la vague est invariable). A deviendra aussi une fonction de x, dont la forme sera à déterminer, et dans $\cos(nt - mx)$, mx, qui représente la décroissance de la phase pour l'espace x, sera remplacé par $\int m\,dx = M$; nous prendrons donc

$$(3) \qquad X = A\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right] \cos(nt - M)$$

et

$$n^2 = mg\,\frac{e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}}{e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}},$$

où η est une fonction de x, m une fonction implicite de x donnée par la relation $m = \frac{dM}{dx}$, et A une fonction à déterminer.

Calculons Y; nous aurons d'abord

$\Xi = 2A\cos(nt - M)$ (valeur de X pour le fond du canal, où $y = \eta$),

et

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dA}{dx}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - M)$$
$$+ A\,\frac{dm}{dx}(y - \eta)\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - M);$$

d'où

$$Y = -\frac{dA}{dx}\,\frac{1}{m}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - M)$$
$$- A\,\frac{1}{m}\,\frac{dm}{dx}(y - \eta)\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - M)$$
$$+ A\,\frac{1}{m^2}\,\frac{dm}{dx}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - M)$$
$$+ A\,\frac{d\eta}{dx}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - M)$$
$$- A\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\sin(nt - M),$$

ou

$$(5)\qquad Y = -\frac{d}{dx}\left\{\frac{A}{m}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - M)\right\}.$$

Les variables x, y et t étant indépendantes, nous pouvons, dans la valeur de F, tirée de l'équation (2),

$$F = \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{d}{dx}\left(gK + \int_y^k \frac{d^2Y}{dt^2}\,dy\right),$$

accomplir la différentiation et l'intégration sous le signe $\frac{d}{dx}$; nous

avons donc

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{n^2A}{m}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M)\right\};$$

$$\int_y^k \frac{d^2Y}{dt^2}dy = -\frac{d}{dx}\left\{\frac{n^2A}{m^2}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M)\right\}$$

$$+\frac{d}{dx}\left\{\frac{n^2A}{m^2}\left[e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}\right]\cos(nt-M)\right\},$$

$$gK = -\frac{d}{dx}\left\{\frac{gA}{m}\left[e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}\right]\cos(nt-M)\right\}$$

et

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -n^2A\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M);$$

d'où, en tenant compte de la relation (4),

$$F = -n^2A\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M)$$
$$-\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{n^2A}{m^2}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M)\right\}.$$

Pour faciliter la différentiation du second terme, nous remarquerons que, la profondeur variant lentement, $\frac{d\eta}{dx}$ et par suite $\frac{dm}{dx}$ et $\frac{dA}{dx}$, qui en dépendent, sont des quantités assez petites pour que nous puissions en négliger les puissances, les produits et les différentielles secondes; si donc nous posons

$$\frac{n^2A}{m^2}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right] = P,$$

nous négligerons $\frac{d^2P}{dx^2}$, et nous aurons

$$\frac{d}{dx}[P\cos(nt-M)] = \frac{dP}{dx}\cos(nt-M) + Pm\sin(nt-M),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[P\cos(nt-M)] = \left(2\frac{dP}{dx}m + P\frac{dm}{dx}\right)\sin(nt-M) - m^2P\cos(nt-M)$$

et

$$F = -\left(2\frac{dP}{dx}m + P\frac{dm}{dx}\right)\sin(nt-M) = -2m^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(Pm^{\frac{1}{2}}\right)\sin(nt-M),$$

ou

$$(6)\qquad F = -2n^2 m^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left\{ A m^{-\frac{3}{2}} \left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)} \right] \sin(nt - M) \right\}.$$

Nous voyons déjà qu'en faisant la différentiation nous aurions un terme en A et un autre en $\frac{dA}{dx}$, et que par suite nous pourrions toujours trouver une valeur de $\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$ qui annulerait F pour une valeur donnée de y, mais non quel que soit y; il faudra donc toujours une force, peut-être extrêmement petite, pour maintenir le mouvement ondulatoire.

En nous reportant au n° 8, nous voyons qu'une des hypothèses les plus plausibles que nous puissions faire pour déterminer A, c'est que la résultante des forces horizontales qui agissent du fond à la surface est nulle.

En développant la valeur (6), nous avons

$$\begin{aligned}
F = \Big\{ & -2n^2 \frac{dA}{dx}\frac{1}{m}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right] \\
& - 2n^2 A \frac{1}{m}\frac{dm}{dx}(y-\eta)\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right] \\
& + 3n^2 A \frac{1}{m^2}\frac{dm}{dx}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right] \\
& \qquad + 2n^2 A \frac{d\eta}{dx}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right] \Big\} \sin(nt - M),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\eta^k F dy = \Big\{ & -2n^2 \frac{dA}{dx}\frac{1}{m^2}\left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right] \\
& - 2n^2 A \frac{1}{m^2}\frac{dm}{dx}(k-\eta)\left[e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}\right] \\
& + 5n^2 A \frac{1}{m^3}\frac{dm}{dx}\left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right] \\
& + 2n^2 A \frac{1}{m}\frac{dx}{d\eta}\left[e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}\right] \\
& \qquad - 4n^2 A \frac{1}{m}\frac{d\eta}{dx} \Big\} \sin(nt - M) \\
= & -2n^2 m^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{dA}{dx} m^{-\frac{5}{2}}\left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right] \\
& \qquad + A \frac{d}{dx}\left\{ m^{-\frac{5}{2}}\left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right] \right\} \\
& \qquad\qquad + 2A m^{-\frac{3}{2}} \frac{d\eta}{dx} \Big) \sin(nt - M)
\end{aligned}$$

et, en égalant les termes entre crochets à zéro,

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}\left\{m^{-\frac{5}{2}}\left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right]\right\} - 2m^{\frac{3}{2}}\frac{d\eta}{dx}}{m^{-\frac{5}{2}}\left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right]}.$$

d'où, pour la valeur de A,

$$(7) \qquad A = \frac{Cm^{\frac{5}{2}}}{e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}}\, e^{Q},$$

Q étant donné par

$$(8) \qquad \frac{dQ}{dx} = -\frac{2m\frac{d\eta}{dx}}{e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}}.$$

D'après la relation (3), le coefficient du déplacement horizontal à la surface est

$$(9) \qquad A_1 = A\left[e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}\right] = \frac{Cg}{n^2}\, m^{\frac{7}{2}}\, e^{Q};$$

d'après la relation (5), K sera de la forme $B\sin(nt - M) + b\cos(nt - M)$ ou, en posant $\frac{b}{B} = \tang\alpha$, $\sqrt{B^2 + b^2}\sin(nt - M + \alpha)$; comme b est très-petit par rapport à B, nous pouvons négliger b^2 sous le radical, et le coefficient du déplacement vertical à la surface est

$$(10) \qquad A_2 = A\left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right] = Cm^{\frac{5}{2}}\, e^{Q}.$$

Il ne nous reste donc qu'à déterminer la fonction Q, ce que nous ne pourrons faire en général; mais les limites suivantes donneront une idée de la valeur générale de cette fonction :

1° Si nous avons des vagues très-courtes pour leur profondeur, comme cela a lieu le plus souvent pour la mer ou les rivières (7), λ est très-petit ou m est très-grand; donc $\frac{dQ}{dx}$ est très-petit, et $e^{Q} = 1$; les coefficients A_1 et A_2 sont proportionnels à $\lambda^{-\frac{7}{2}}$ et $\lambda^{-\frac{5}{2}}$, et l'on peut s'assurer que cette proportion est encore très-rigoureuse, même quand la profondeur n'est que la moitié de la longueur de la vague.

2° Dans les vagues-marées, λ est très-grand et m très-petit; donc

$$e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)} = 2m(k-\eta) \quad \text{et} \quad \int \frac{dQ}{dx}dx = 1.(k-\eta) \quad \text{ou} \quad e^{Q} = k-\eta;$$

et, en tenant compte de la relation (4), qui devient $m = \frac{n}{\sqrt{g}} \frac{1}{(k-\eta)^{\frac{1}{2}}}$,

nous voyons que A_1 et A_2 sont ici proportionnels à $\lambda^{-\frac{3}{2}}$ et $\lambda^{-\frac{1}{2}}$.

15. *Canal de profondeur constante et de largeur variable.* — Nous pouvons, d'une manière tout à fait semblable, étudier les mouvements des vagues dans un canal étroit de profondeur constante, mais de largeur variable. Soit β la largeur variable; elle devient $\beta + \frac{d\beta}{dx}$ au bout du temps t, et nous aurons, pour exprimer la continuité,

$$\beta h l = \beta\left(1 + \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dx}X\right) h \left(1 + \frac{dX}{dx}\right) l \left(1 + \frac{dY}{dy}\right)$$

ou

$$0 = \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dx}X + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy},$$

et

$$(1) \qquad Y = -\int_0^y \left(\frac{dX}{dx} + \frac{X}{\beta}\frac{d\beta}{dx}\right)$$

sera l'équation de continuité.

L'équation de mouvement est toujours

$$(2) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = F - \frac{d}{dx}\left(gK + \int_y^k \frac{d^2Y}{dt^2}dy\right).$$

En procédant comme dans la question précédente, nous verrons que nous serons amené à prendre

$$(3) \qquad X = A(e^{my} + e^{-my})\cos(nt - mx)$$

avec

$$(4) \qquad n^2 = mg\frac{e^{mk} - e^{-mk}}{e^{mk} + e^{-mk}},$$

A étant une fonction de x; en calculant les quantités qui entrent dans nos équations, nous trouvons

$$5)\quad \left\{ Y = -(e^{my} - e^{-my})\left[\frac{1}{m}\frac{dA}{dx}\cos(nt - mx) + A\sin(nt - mx) + \frac{1}{m}\frac{A}{\beta}\frac{d\beta}{dx}\cos(nt - mx)\right]\right.$$

et

$$6)\quad F = -(e^{my} + e^{-my})\left(\frac{2n^2}{m}\frac{dA}{dx} + \frac{n^2}{m}\frac{A}{\beta}\frac{d\beta}{dx}\right)\sin(nt - mx).$$

Cette expression est constamment nulle ou le mouvement peut continuer sans force extérieure si $\frac{2dA}{dx} + \frac{A}{\beta}\frac{d\beta}{dx} = 0$ ou $A = \frac{C}{\sqrt{\beta}}$, C étant une constante; c'est-à-dire qu'il faudrait que le coefficient du déplacement horizontal fût en raison inverse de la racine carrée de la largeur; le coefficient de déplacement vertical à la surface diffère très-peu de $-A(e^{mk} - e^{-mk})$, et ainsi la hauteur des vagues sera, dans ce cas, en raison inverse de la racine carrée de la largeur du canal.

Dans le cas d'un canal de largeur et de profondeur constantes, nous avons vu (8) que les maxima de vitesses en avant ou en arrière ont lieu pour les points situés aux parties supérieures et inférieures des trajectoires circulaires ou elliptiques des molécules; il n'en est plus de même dans les deux derniers cas où le maximum et le minimum de Y ne répondent plus aux maxima absolus de x; et l'on voit, en formant l'expression de K, que, lorsque des vagues se propagent dans une rivière où la profondeur et la largeur vont en diminuant séparément, ou simultanément, ce qui a lieu le plus souvent, le niveau de l'eau à la fin du courant de flot est plus élevé que le niveau moyen, et plus bas à la fin du courant de jusant.

16. *Des vagues-marées dans un canal de largeur et de profondeur variables.* — Nous pourrions combiner les résultats des deux questions précédentes; mais nous pouvons arriver beaucoup plus facilement à la solution dans le cas des vagues-marées, qui est le plus important pour la pratique.

Soient $z = \varphi(y, x)$ l'équation du profil du canal et $u = \psi(y, z)$ son aire; la profondeur étant variable, nous prendrons (14)

$$(1) \qquad X = A\cos(nt - M),$$

où $M = \int m\,dx$. Or, d'après le n° 13, la vague qui traverse un canal de section uniforme dont l'aire est $\psi(k)$ est représentée par

$$X = \chi(v't - x) = \chi_1\left[nt - nx\sqrt{\frac{\varphi(k)}{g\psi(k)}}\right];$$

nous avons donc pour M

$$(2) \qquad M = n\int\sqrt{\frac{\varphi(k, x)}{g\psi(k, x)}}\,dx.$$

Nous formerons l'équation de continuité, comme nous l'avons déjà fait dans le cas des longues vagues; le volume $h\psi(k, x)$, compris entre les deux sections qui sont distantes de h à l'état de repos, devient, dans le mouvement, $h\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)\psi(V, x + X)$; et, comme $\frac{d\psi(k, x)}{dx} = \varphi(k, x)$, nous avons

$$h\psi(k, x) = h\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)\left[\psi(k, x) + \varphi(k, x)(V - k) + \frac{d\psi(k, x)}{dx}X\right],$$

d'où

$$(3) \qquad V - k = -\frac{1}{\varphi(k, x)}\frac{d}{dx}\left[X\psi(k, x)\right].$$

Pour l'équation de mouvement, nous prendrons simplement

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -g\frac{dV}{dx},$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = g\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\varphi(k, x)}\frac{d}{dx}\left[X\psi(k, x)\right]\right\}$$

et, en tenant compte des relations (1) et (2),

$$-n^2A\cos(nt - M) = g\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\varphi(k, x)}\frac{d}{dx}\left[A\psi(k, x)\right]\cos(nt - M)\right.$$
$$\left. + nA\sqrt{\frac{\psi(k, x)}{g\varphi(k, x)}}\sin(nt - M)\right\}.$$

Comme les fonctions φ et ψ varient lentement, nous négligerons les termes du second ordre, d'où

$$-n^2 A\cos(nt-M) = n\sqrt{g}\left\{\frac{1}{\sqrt{\varphi(k,x)\psi(k,x)}}\frac{d}{dx}[A\psi(k,x)] + \frac{d}{dx}\frac{A\psi(k,x)}{\sqrt{\varphi(k,x)\psi(k,x)}}\right\}$$
$$\times \sin(nt-M) - n^2 A\cos(nt-M)$$

et, en posant $A\psi(k,x) = \nu$ et $\sqrt{\varphi(k,x)\psi(k,x)} = \mu$,

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\nu}{dx} + \frac{d}{dx}\frac{\nu}{\mu} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\nu}\frac{d\nu}{dx} - \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = 0,$$

équation dont l'intégrale est $\frac{\nu^2}{\mu} = C^2$, C étant une constante; d'où

$$(5) \qquad A = C\psi(k,x)^{-\frac{3}{4}}\varphi(k,x)^{-\frac{1}{4}}$$

pour le coefficient de déplacement horizontal.

Le déplacement vertical est $K = V - k(3)$ ou

$$K = -\frac{1}{\varphi(k,x)}\left[\frac{d}{dx}A\psi(k,x)\cos(nt-M)\right.$$
$$\left. + A\psi(k,x)\sin(nt-M)n\sqrt{\frac{\varphi(k,x)}{g\psi(k,x)}}\right];$$

nous pouvons sans grande erreur négliger le premier terme devant le second, d'où

$$K = -\frac{n}{\sqrt{g}}A\sqrt{\frac{\psi(k,x)}{\varphi(k,x)}}\sin(nt-M),$$

et le coefficient du déplacement vertical est, en vertu de (5),

$$(6) \qquad B = -\frac{nC}{\sqrt{g}}\psi(k,x)^{-\frac{1}{4}}\varphi(k,x)^{-\frac{1}{4}}.$$

17. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les forces extérieures n'agissaient que dans la direction horizontale du mouvement; or, les marées étant un phénomène périodique produit par l'attraction des astres et principalement de la Lune, nous devons étudier maintenant la nature du mouvement ondulatoire produit par des

forces périodiques, agissant dans une direction quelconque; nous nous bornerons du reste au cas du mouvement dans un canal de largeur et de profondeur uniformes.

Soient donc $H\sin(it - mx)$ et $G\cos(it - mx)$ les accélérations dans le sens horizontal et dans le sens vertical; nous devons prendre les équations générales du n° 4, qui sont dans le cas actuel, en ajoutant l'accélération verticale à celle de la pesanteur,

$$(1) \qquad Y = -\int_0^y \frac{dX}{dx}\,dy,$$

et

$$\frac{d^2X}{dt^2} = H\sin(it - mx) - \frac{d}{dx}\left\{[g + G\cos(it - mx)](k - y + K) + \int_y^k \frac{d^2Y}{dt^2}\,dy\right\}.$$

Or les forces agissantes sont assez faibles; K, d'après l'observation, est toujours assez petit, et $\frac{d}{dx}g(k - y) = 0$; cette équation se réduit donc à

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} &= H\sin(it - mx) \\ &\quad - \frac{d}{dx}\left[gK + (k - y)G\cos(it - mx) + \int_y^k \frac{d^2Y}{dt}\,dy\right]. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que X dépend de $\sin(it - mx)$; posons donc

$$(3) \qquad X = \varphi''(y)\sin(it - mx);$$

en considérant φ'' comme la dérivée seconde d'une fonction φ, alors

$$(4) \qquad Y = m[\varphi'(y) - \varphi'(0)]\cos(it - mx);$$

d'où, en effectuant les opérations indiquées dans l'équation (2),

$$\begin{aligned} &-i^2\varphi''(y)\sin(it - mx) \\ &\quad = H\sin(it - mx) - gm^2[\varphi'(k) - \varphi'(0)]\sin(it - mx) \\ &\qquad - m(k - y)G\sin(it - mx) \\ &\qquad + i^2m^2[\varphi(k) - \varphi(y) - \varphi'(0)(k - y)]\sin(it - mx). \end{aligned}$$

Pour satisfaire à cette équation, égalons d'abord à zéro les termes en y; il vient

$$i^2\varphi''(y) = i^2 m^2 \varphi(y) \quad \text{et} \quad m(k-y)G + i^2 m^2 \varphi'(0)(k-y) = 0:$$

la première de ces conditions donne

$$\psi(y) = A e^{my} + B e^{-my};$$

la seconde se réduit à

$$G + i^2 m \varphi'(0) = 0, \quad \text{d'où} \quad B = A + \frac{G}{i^2 m^2}.$$

Remplaçant dans la partie restante de l'équation φ, φ' et φ'' par leurs valeurs

$$\varphi(y) = A(e^{my} + e^{-my}) + \frac{G}{i^2 m^2} e^{-my},$$

$$\varphi'(y) = mA(e^{my} - e^{-my}) - \frac{G}{i^2 m} e^{-my},$$

$$\varphi''(y) = m\varphi(y),$$

nous avons

$$H - gm^2\left[mA(e^{mk} - e^{-mk}) - \frac{G}{i^2 m} e^{-mk} + \frac{G}{i^2 m}\right]$$
$$+ i^2 m^2\left[A(e^{mk} + e^{-mk}) + \frac{G}{i^2 m^2} e^{-mk}\right] = 0;$$

d'où

$$A = \frac{-H + \frac{gm}{i^2} G - \left(1 + \frac{gm}{i^2}\right) G e^{-mk}}{i^2 m^2 (e^{mk} + e^{-mk}) - gm^3 (e^{mk} - e^{-mk})}$$

et

$$B = \frac{-H + \frac{gm}{i^2} G + \left(1 - \frac{gm}{i^2}\right) G e^{mk}}{i^2 m^2 (e^{mk} + e^{-mk}) - gm^3 (e^{mk} - e^{-mk})},$$

puis

$$\varphi''(y) = \frac{-H + \frac{gm}{i^2} G - \left(\frac{gm}{i^2} + 1\right) G e^{-mk}}{i^2 (e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})} e^{my}$$
$$+ \frac{-H + \frac{gm}{i^2} G - \left(\frac{gm}{i^2} - 1\right) G e^{mk}}{i^2 (e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})} e^{-my}$$

et

$$m\varphi'(y) = \frac{-\mathrm{H} + \frac{gm}{i^2}\mathrm{G} - \left(\frac{gm}{i^2} + 1\right)\mathrm{G}\,e^{-mk}}{i^2(e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})}\,e^{my},$$

$$- \frac{-\mathrm{H} + \frac{gm}{i^2}\mathrm{G} - \left(\frac{gm}{i^2} - 1\right)\mathrm{G}\,e^{mk}}{i^2(e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})}\,e^{-my}.$$

Nous pouvons ainsi former nos valeurs de X et de Y, et nous reconnaissons déjà que l'eau est animée d'un mouvement ondulatoire tout à fait semblable à ceux que nous avons étudiés jusqu'ici.

La vague définie par ces valeurs de X et de Y est une de ces vagues que nous avons déjà souvent mentionnées sous le nom de *vagues-marées ;* celle-ci dépend entièrement de la continuité d'action des forces extérieures, et nous l'appellerons *vague-marée forcée ;* il existe conjointement avec elle d'autres vagues, appelées *vagues-marées libres,* résultant de la valeur antérieure des forces, et de toute cause venant à modifier le mouvement, comme la réflexion sur un obstacle ou la variation périodique de la grandeur des forces attractives. Ces vagues peuvent avoir même période et longueur différente, ou même longueur et période différente, et diffèrent essentiellement de la vague forcée, parce que leurs longueurs et périodes sont alors liées par la relation que nous avons établie (6), quand il n'y avait pas de forces agissantes

$$n^2 = mg\,\frac{e^{mk} - e^{-mk}}{e^{mk} + e^{-mk}}.$$

C'est à ces vagues qu'est due complétement la marée dans les rivières ou bras de mer étroits, et la presque totalité de la marée en mer libre dans les latitudes un peu élevées.

Si nous formons les valeurs de X et de Y à la surface, nous obtenons pour la vague forcée

$$\mathrm{X}_s = \frac{-\mathrm{H}(e^{mk} + e^{-mk}) + \mathrm{G}\,\frac{gm}{i^2}(e^{mk} - 2 + e^{-mk})}{i^2(e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})}\,\sin(it - mx)$$

et

$$\mathrm{K} = \frac{-\mathrm{H}(e^{mk} - e^{-mk}) + \mathrm{G}(e^{mk} - 2 + e^{-mk})}{i^2(e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})}\,\cos(it - m.x),$$

et, en tenant compte de la relation entre n et m, nous avons, pour une vague libre de même longueur,

$$X_{s_1} = \frac{-H + G\frac{n^2}{i^2}\frac{e^{\frac{mk}{2}} - e^{-\frac{mk}{2}}}{e^{\frac{mk}{2}} + e^{-\frac{mk}{2}}}}{i^2 - n^2} \sin(it - mx)$$

et

$$K_1 = \frac{-H\frac{n^2}{gm} + G\frac{n^2}{gm}\frac{e^{\frac{mk}{2}} - e^{-\frac{mk}{2}}}{e^{\frac{mk}{2}} + e^{-\frac{mk}{2}}}}{i^2 - n^2} \cos(it = mx).$$

Or, dans les vagues-marées, à l'équateur, la longueur de la vague atteint 25000 kilomètres, et les plus grandes profondeurs de l'Océan ne dépassent guère 8000 mètres; le produit mk est donc très-petit, et l'on peut écrire

$$X_{s_1} = \frac{-H + G\frac{n^2}{i^2}\frac{mk}{2}}{i^2 - n^2} \sin(it - mx),$$

et

$$K_1 = \frac{-H\frac{n^2}{mg} + G\frac{n^2}{mg}\frac{mk}{2}}{i^2 - n^2} \cos(it - mx).$$

Comme H et G sont des grandeurs de même ordre, nous voyons que l'effet des forces verticales est complétement insignifiant devant celui des forces horizontales, et nous sommes ainsi justifié de n'avoir, dans toutes les questions que nous avons traitées précédemment sur la hauteur de la marée en rivières, considéré que des forces extérieures horizontales. Nous ne nous étendrons pas davantage sur les conséquences très-importantes qu'a tirées Airy de l'étude des vagues-marées, au point de vue de la théorie générale de la marée, et nous continuerons par l'examen d'un des cas qui se présentent le plus fréquemment dans la nature.

18. *Étude du mouvement ondulatoire qui se produit dans un canal dont les eaux sont soumises à l'attraction lunaire, etc., et qui, ferme à l'une de ses extrémités, communique à l'autre avec une mer libre à*

marée [*]. — Rappelons d'abord que, lorsque l'on a une équation différentielle à second membre, une solution z de cette équation, et des solutions z_1, z_2,... de l'équation sans second membre, la combinaison linéaire $az + a_1 z_1 + a_2 z_2, \ldots$ sera une solution de l'équation complète.

Or nous avons trouvé (**17**), pour la solution de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 X}{dt^2} = F - \frac{d}{dx}\left(gK + \int_y^k \frac{d^2 Y}{dt^2}\, dy\right)$$

dans le cas qui nous occupe, une valeur de la forme $X = C\cos(it - mx)$, et nous avons aussi (**6**), pour solution de l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{d}{dx}\left(gK + \int_y^k \frac{d^2 Y}{dt^2}\, dy\right),$$

des valeurs de X de la forme

$$A\cos(nt - mx + a), \quad B\cos(nt + mx + b), \ldots,$$

où m et n sont liées par la relation

$$(3) \qquad n^2 = mg\,\frac{e^{mk} - e^{-mk}}{e^{mk} + e^{-mk}}.$$

La somme de ces valeurs satisfera à l'équation (1); de plus, comme toutes les parties du canal, à un instant quelconque, sont soumises aux mêmes influences, les quantités i, n,... sont les mêmes; la solution la plus générale de l'équation (1) est donc

$$(4) \quad X = C\cos(nt - px) + D\cos(nt - mx + E) + F\cos(nt + mx + G).$$

Nous en déduisons immédiatement

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} K = &-Cpk\sin(nt - px) \\ &-Dmk\sin(nt - mx + E) + Fmk\sin(nt + mx + G); \end{aligned} \right.$$

[*] L'effet d'un rétrécissement brusque est à peu près celui d'un barrage pour la partie en aval, tandis que la marée se propage dans la partie en amont, comme s'il n'y avait plus de force extérieure.

mais, si nous désignons par $A \sin(nt + B)$ la loi de hauteur de la marée à l'embouchure, et a la distance du barrage à cette embouchure, nous devons avoir $X = 0$ pour $x = a$, quel que soit t, et $K = A \sin(nt + B)$ pour $x = 0$, c'est-à-dire

$$-Cpk \sin nt - Dmk \sin(nt + E) + Fmk \sin(nt + G) = A \sin(nt + B)$$

et

$$C \cos(nt - pa) + D \cos(nt - ma + E) + F \cos(nt + ma + G) = 0.$$

Développant et identifiant les termes en $\sin nt$ et $\cos nt$, nous avons

$$\begin{aligned}
-Cpk - mk D\cos E + mk F \cos G &= A \cos B,\\
-mAD \sin E + mk F \sin G &= A \sin B,\\
C \cos pa + \cos ma\, D\cos E + \sin ma\, D \sin E&\\
+ \cos ma\, F \cos G - \sin ma\, F \sin G &= 0,\\
C \sin pa - \cos ma\, D \sin E + \sin ma\, D \cos E&\\
- \cos ma\, F \sin G - \sin ma\, F \cos G &= 0.
\end{aligned}$$

Tirant de là la valeur des constantes D, E, F, G, nous obtenons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
X = {} & \frac{A}{mk \cos ma} \sin(nt + B) \sin(ma - mx) + C \cos(nt - px)\\
& + \frac{Cp}{m \cos ma} \sin nt \sin(ma - mx) - \frac{C}{\cos ma} \cos(nt - pa) \cos mx
\end{aligned}\right.$$

et

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
K = {} & \frac{A}{\cos ma} \sin(nt + B) \cos(ma - mx) - Cpk \sin(nt - px)\\
& + \frac{Cpk}{\cos ma} \sin nt \cos(ma - mx) - \frac{Cmk}{\cos ma} \cos(nt - pa) \sin mx.
\end{aligned}\right.$$

Nous voyons que l'élévation de l'eau n'est plus une expression simple comme celles que nous avons trouvées jusqu'ici, et qu'elle peut être considérée comme due à la combinaison d'une vague-marée forcée (le terme en $nt - px$) et de trois vagues libres stationnaires (9).

Pour calculer les phases de la marée, nous pouvons mettre K sous la forme $K = P \sin nt - Q \cos nt$ et, en posant $\frac{Q}{P} = \operatorname{tang} \theta$,

$$K = \sqrt{P^2 + Q^2} \sin(nt - \theta),$$

expression dans laquelle

$$P = \frac{A \cos B \cos(ma - mx)}{\cos ma} - Cpk \cos px$$
$$+ \frac{Cpk \cos(ma - mx)}{\cos ma} - \frac{Cmk \sin pa \sin mx}{\cos ma}$$

et

$$Q = -\frac{A \sin B \cos(ma - mx)}{\cos ma} - Cpk \sin px + \frac{Cmk \cos pa \sin mx}{\cos ma}.$$

La hauteur totale de la marée est donnée pour $K_1 = 2\sqrt{P^2 + Q^2}$: le moment de la haute mer par $nt - \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\operatorname{tang} nt = -\frac{P}{Q}$, et celui de la basse mer par $nt - \theta = -\frac{\pi}{2}$ ou $\operatorname{tang} nt = \frac{P}{Q}$. Ces expressions, ainsi que celle de la propagation de la phase $\frac{d\theta}{dx}$, dépendant de x, sont fort complexes et ne peuvent être étudiées facilement qu'au moyen de courbes pour des valeurs données de x.

19. Mais dans les rivières, excepté peut-être quelques-uns des grands fleuves des régions équatoriales, on peut considérer l'attraction lunaire sur leurs eaux comme insensible, et les valeurs de X et de K deviennent, en supposant $C = 0$,

$$(6') \qquad X' = \frac{A}{mk \cos ma} \sin(nt + B) \sin(ma - mx)$$

et

$$(7') \qquad K' = \frac{A}{\cos ma} \sin(nt + B) \cos(ma - mx).$$

Nous voyons que toutes les oscillations aux différentes stations le long de la rivière ont lieu simultanément, ou qu'il y a haute ou basse mer

en tous les points au même moment; la marée totale est

$$K'_1 = \frac{2A}{\cos ma}\cos(ma - mx);$$

et comme, dans les vagues-marées, on a toujours $ma < \frac{\pi}{2}$, la hauteur de la marée augmente de l'embouchure au barrage, où elle atteint son maximum $\frac{2A}{\cos ma}$. Nous voyons aussi que le plus grand déplacement horizontal a lieu au même moment que le plus grand vertical, et diminue de l'embouchure au barrage, où il est nul; les courants de flot et de jusant donnés par

$$(8') \qquad \frac{dX'}{dt} = \frac{nA}{mk\cos ma}\cos(nt + B)\sin(ma - mx)$$

ont leurs maxima au moment de la haute et de la basse mer, et diminuent d'intensité de l'embouchure au barrage.

20. Nous pouvons du reste pousser la question plus loin et étudier, comme au n° **10**, le cas où la profondeur de la rivière est sensiblement modifiée par la marée : l'équation du problème est

$$(1'') \quad \frac{d^2X}{dt^2} - v^2\frac{d^2X}{dx^2} = v^2\frac{d^2X}{dx^2}\left[-3\frac{dX}{dx} - 6\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 - \cdots\right], \quad \text{où} \quad v^2 = gh.$$

Nous prendrons comme première valeur approchée

$$X = \frac{A}{mk\cos ma}\sin(mvt + B)\sin(ma - mx),$$

et nous procéderons comme au n° **10**, en substituant cette valeur dans le second membre de (1'') et nous arrêtant d'abord au terme en $\frac{dX}{dx}$; d'où

$$(6'') \quad \left\{\begin{aligned} X'' = {} & \frac{A}{mk\cos ma}\sin(ma - mx)\sin(mvt + B) \\ & - \frac{A^2}{k^2\cos^2 ma}\left[\frac{3}{16m}\sin(2ma - 2mx) \right. \\ & \left. + \frac{3}{16}x\cos(2ma - 2mx)\cos(2mvt + 2B)\right] \\ & + \varphi(vt - x) + \psi(vt + x). \end{aligned}\right.$$

Nous en déduirons, pour l'élévation à une station distante de x' de l'embouchure du canal,

$$(7'')\quad \left\{\begin{aligned} K'' = {} & \frac{A}{\cos ma}\cos(ma - mx')\sin(mvt + B) \\ & + \frac{1}{8}\frac{A^2}{k\cos^2 ma}\left[\cos(2ma - 2mx') - \cos 2ma\right] \\ & - \frac{3}{8}\frac{A^2}{k\cos^2 ma}\, mx' \sin(2ma - 2mx')\cos(2mvt + 2B). \end{aligned}\right.$$

La loi de la montée et de la baissée est maintenant différente de la précédente pour chaque station de la rivière, sauf à l'embouchure; mais la haute et la basse mer auront encore lieu partout simultanément. Le second terme de l'expression est constant pour une station donnée; le premier et le troisième sont de la forme

$$C\sin(mvt + B) + D\cos(2mvt + 2B).$$

De l'influence du frottement sur le mouvement ondulatoire.

21. Le frottement des molécules d'eau entre elles, et sur les bords et le fond d'une rivière, modifie beaucoup tous les résultats auxquels nous sommes arrivés; les effets ne pouvant toujours en être complétement analysés, nous allons seulement étudier, dans quelques-uns des cas traités précédemment, la nature des modifications éprouvées.

De la propagation des vagues-marées dans un canal dont l'eau est soumise à l'attraction lunaire, etc., en tenant compte des frottements. (*Voir* n° **17**.) Nous nous bornerons à l'examen du cas où les mouvements dus à la marée sont petits relativement à la profondeur du canal. L'équation du mouvement se réduit alors à

$$\frac{d^2X}{dt^2} = F + v^2\frac{d^2X}{dx^2},$$

où $v^2 = gk$, k étant la profondeur du canal, et F comprenant la force périodique horizontale $H\sin(it - mx)$ et la résistance due au frottement; comme les vitesses sont toujours assez faibles, nous supposerons le frottement proportionnel à la simple vitesse, et nous aurons pour

l'équation générale du problème

$$(1) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = H\sin(it - mx) - f\frac{dX}{dt} + v^2\frac{d^4X}{dx^2}.$$

Le mouvement sera périodique et de même période que la force ; nous prendrons donc pour X la forme la plus générale qui satisfasse à cette équation

$$(2) \qquad X = A\cos it + B\sin it,$$

A et B étant des fonctions de x à déterminer. En substituant dans (1), nous aurons une équation

$$-i^2A\cos it - i^2B\sin it = H\cos mx\sin it - H\sin mx\cos it + fiA\sin it$$
$$-fiB\cos it + v^2\frac{d^2A}{dx^2}\cos it + v^2\frac{d^2B}{dx^2}\sin it,$$

qui doit être satisfaite quel que soit t, ce qui donne

$$(a) \qquad -i^2A = -H\sin mx - fiB + v^2\frac{d^2A}{dx^2},$$

$$(b) \qquad -i^2B = H\cos mx + fiA + v^2\frac{d^2B}{dx^2};$$

pour éliminer B, nous tirons de (a)

$$(c) \qquad fi\frac{d^2B}{dx^2} = v^2\frac{d^4A}{dx^4} + i^2\frac{d^2A}{dx^2} + m^2H\sin mx,$$

puis nous ajoutons ces trois équations multipliées respectivement par i^2, fi et v^2 :

$$(3) \qquad v^4\frac{d^4A}{dx^4} + 2v^2i^2\frac{d^2A}{dx^2} + (i^4 + f^2i^2)A$$
$$+ (v^2m^2 - i^2) - H\sin mx + fiH\cos mx = 0.$$

Si nous désignons par $\pm p \pm q\sqrt{-1}$ les racines de l'équation

$$v^4z^4 + 2v^2i^2z^2 + (i^4 + f^2i^2) = 0,$$

ou

$$p = -\frac{i^2}{2v^2} + \sqrt{\frac{i^4 + f^2i^2}{4v^4}} \quad \text{et} \quad q = \frac{i^2}{2v^2} + \sqrt{\frac{i^4 + f^2i^2}{4v^4}},$$

et si nous posons $M = (v^2 m^2 - i^2) H \sin mx + fi H \cos mx$, l'intégrale de l'équation différentielle précédente est

$$A = -\frac{1}{v^4} e^{px} \cos qx \int \frac{dx}{\cos^2 qx} \int e^{-2px} \cos^2 qx\, dx \int \frac{dx}{\cos^2 qx} \int e^{px} \cos qx\, M dx,$$

chaque intégration amenant une constante arbitraire; mais, sans effectuer ces calculs, nous pouvons remarquer que la portion de l'intégrale totale dépendant des constantes arbitraires est de la forme

$$C e^{px} \cos qx + C' e^{px} \sin qx + C'' e^{-px} \cos qx + C''' e^{-px} \sin qx,$$

et que la substitution de $\sin mx$ et $\cos mx$ dans les trois premiers termes de (3) donnera un terme en $\sin mx$ et $\cos mx$ avec $(m^4 v^4 - 2m^2 v^2 i^2 + f^2 i^2)$ en facteur; la solution la plus générale de l'équation sera donc

$$A = \frac{(i^2 - v^2 m^2) H}{v^4 m^4 - 2m^2 v^2 i^2 + i^4 + f^2 i^2} \sin mx - \frac{fi H}{v^4 m^4 - 2v^2 m^2 i^2 + i^4 + f^2 i^2} \cos mx$$
$$+ C e^{px} \cos qx + C' e^{px} \sin px + C'' e^{-px} \cos qx + C''' e^{-px} \sin qx.$$

Pour trouver B, nous remplacerons A par cette valeur dans (a), en remarquant que

$$v^2 \frac{d^2}{dx} (e^{px} \cos qx) + i^2 e^{px} \cos qx$$
$$= e^{px} [(p^2 v^2 - q^2 v^2 + i^2) \cos qx - 2v^2 pq \sin qx] = -fi\, e^{px} \sin qx,$$

en tenant compte des valeurs de p et de q, et nous aurons

$$B = \frac{-fi H}{(i^2 - v^2 m^2)^2 + f^2 i^2} \sin mx - \frac{(i^2 - v^2 m^2) H}{(i^2 - v^2 m^2)^2 + f^2 i^2} \cos mx - C e^{px} \cos qx$$
$$+ C' e^{px} \cos qx + C'' e^{-px} \sin qx - C''' e^{-px} \cos qx,$$

et l'équation (2) nous donnera la valeur de X.

22. Mais nous avons déjà vu (**19**) que, en général, nous pourrions, dans les rivières, négliger la force attractive des astres.

Supposons donc *une rivière de longueur indéfinie communiquant avec une mer à marée.*

La valeur de X se réduit à

$$\begin{aligned} X = {} & e^{px}[C\cos(it + qx + C'\sin(it + qx)] \\ & + e^{-px}[C''\cos(it - qx) - C'''\sin(it - qx)\ , \end{aligned}$$

et, comme la marée se propage depuis la mer sans rencontrer d'obstacle, cette expression ne doit pas contenir de termes en $(it + qx)$, d'où, en définitive,

$$(1) \qquad X = e^{-px}[C''\cos(it - qx) - C'''\sin(it - qx)],$$

et

$$K = -k\frac{dX}{dx} = ke^{-px}[(pC'' - qC''')\cos(it - qx) - (qC'' + pC''')\sin(it - qx)].$$

La loi de la marée étant toujours représentée par $A\sin nt$, il en résulte

$$i = n, \quad pC'' - qC''' = 0, \quad qC'' + pC''' = A,$$

d'où

$$(2) \qquad K = Ae^{-px}\sin(nt - qx),$$

$$C'' = -\frac{qA}{k(p^2 + q^2)}, \quad C''' = -\frac{pA}{k(p^2 + q^2)}$$

et enfin

$$(1') \qquad X = \frac{A}{k(p^2 + q^2)}e^{-px}[p\sin(nt - qx) - q\cos(nt - qx)].$$

Ces valeurs montrent que la marée diminue constamment en remontant la rivière, et cessera en un certain point donné par la valeur de x, qui annulerait X. La vitesse du courant est donnée par

$$(3) \qquad \frac{dX}{dt} = \frac{nA}{k(p^2 + q^2)}e^{-px}[q\sin(nt - qx) + q\cos(nt - qx)];$$

à mer haute

$$nt - qx = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dX}{dt} = \frac{nA}{k(p^2 + q^2)}e^{-px}q;$$

à hauteur moyenne

$$nt - qx = \pi, \quad \frac{dX}{dt} = \frac{nA}{k(p^2 + q^2)}e^{-px}p.$$

Ainsi le courant de jusant se forme plus promptement après le moment de la haute mer que s'il n'y avait pas eu de frottement; l'inverse a lieu après la basse mer; on peut du reste étudier la durée de la montée et de la baissée comme nous l'avons fait au n° **11**.

23. Supposons maintenant que la rivière soit barrée à une distance a de l'embouchure. (*Voir* n° **11**.)

Nous aurons une vague réfléchie et nous conserverons alors la valeur générale de X,

$$(1)\quad \begin{cases} X = e^{px}[C\cos(it+qx) + C'\sin(it+qx) \\ \qquad + e^{-px}[C''\cos(it-qx) - C'''\sin(it-qx)], \end{cases}$$

avec

$$(2)\quad \begin{cases} K = -ke^{px}[(pC+qC')\cos(it+qx) + (-qC+pC')\sin(it+qx)], \\ \qquad -ke^{-px}[(-pC''+qC''')\cos(it-qx) + (qC''+pC''')\sin(it-qx)]; \end{cases}$$

pour $x = 0$,

$$K_0 = -k[(pC+qC')\cos it + (-qC+pC')\sin it] \\ -k[(-pC''+qC''')\cos it + (qC''+pC''')\sin it],$$

et nous en déduirons, d'après la loi de la marée à l'embouchure,

$$i = n,\quad pC + qC' - pC'' + qC''' = 0,\quad k(qC - pC' - qC' - pC''') = A.$$

La condition relative au barrage est que X soit nul pour $x = a$, quel que soit t, d'où

$$e^{pa}(C\cos qa + C'\sin qa) + e^{-pa}(C''\cos qa + C'''\sin qa) = 0,$$
$$e^{pa}(-C\sin qa + C'\cos qa) + e^{-pa}(C''\sin qa - C'''\cos qa) = 0;$$

les quatre dernières équations déterminent les constantes, et la valeur de K devient

$$(2')\quad \begin{cases} K = \dfrac{A}{\sqrt{e^{2pa} + e^{-2pa} + 2\cos 2qa}}[e^{px-pa}\sin(it+qx-E) \\ \qquad + e^{pa-px}\sin(it-qx+F)], \end{cases}$$

expression dans laquelle

$$\operatorname{tang} E = \frac{\sin 2qa}{e^{-2pa} + \cos 2qa}, \quad \operatorname{tang} F = \frac{\sin 2qa}{e^{2pa} + \cos 2qa},$$

d'où

$$E + F = 2qa.$$

La quantité entre crochets peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &\cos it\,[e^{px-pa}\sin(qx - E) - e^{pa-px}\sin(qx - F)] \\ &\quad + \sin it\,[e^{px-pa}\cos(qx - E) + e^{pa-px}\cos(qx - F)] \\ &\quad = P\cos it + Q\sin it \end{aligned}$$

ou, en posant $\frac{Q}{P} = \operatorname{tang} D$,

$$\sqrt{P^2 + Q^2}\cos(it - D);$$

d'où

$$K = A\sqrt{\frac{e^{2px-2pa} + e^{2pa-2px} + 2\cos(2qa - 2qx)}{e^{2pa} + e^{-2pa} + 2\cos 2qa}}\cos(it - D).$$

Nous voyons que la marée totale n'augmente ici, à mesure que l'on remonte dans la rivière, que si $4q\sin(2qa - 2px) > 2p(e^{2pa-2px} - e^{2px-2pa})$; quand on ne considère pas le frottement, elle augmente toujours de l'embouchure au barrage.

Le moment de la haute mer est $t' = \frac{D}{i}$, et $\frac{1}{i}\frac{dD}{dx}$ nous représente l'inverse de la vitesse de propagation de la phase de la haute mer $\frac{1}{v}$, ou

$$\frac{dD}{dx} = \frac{P\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dP}{dx}}{P^2 + Q^2},$$

d'où

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{i}\,\frac{q(e^{2pa-2px} - e^{2px-2pa}) + 2p\sin(2qa - 2qx)}{e^{2pa-2px} + e^{2px-2pa} + 2\cos(2qa - 2qx)}.$$

Cette quantité est toujours positive, ce qu'il est facile de voir; nous avons donc toujours une vague progressant en remontant la rivière, ce qui peut ne pas avoir lieu quand on ne considère pas le frottement.

En traitant la valeur de X, comme nous l'avons fait pour K, nous trouverons

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} X = & \frac{A}{k\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{e^{2pa}+e^{-2pa}+2\cos 2qa}} \\ & \times [e^{px-pa}\cos(it+qx-G) - e^{pa-px}\cos(it-qx-H)] \end{aligned} \right.$$

ou

$$\operatorname{tang} G = \frac{-p-pe^{2pa}\cos 2qa+qe^{2pa}\sin 2qa}{q+pe^{2pa}\sin 2qa+qe^{2pa}\cos 2qa},$$

$$\operatorname{tang} H = \frac{pe^{4pa}+pe^{2pa}\cos 2qa+qe^{2pa}\sin 2qa}{-qe^{4pa}+pe^{2pa}\sin 2qa-qe^{2pa}\cos 2qa}$$

et

$$H - G = -2qa.$$

La quantité entre crochets est

$$\begin{aligned} & \cos it[e^{px-pa}\cos(qx-G) - e^{pa-px}\cos(qx+H)] \\ & -\sin it[e^{px-pa}\sin(qx-G) + e^{pa-px}\sin(qx+H)], \end{aligned}$$

et peut se mettre sous la forme

$$P'\cos it - Q'\sin it = \sqrt{P'^2+Q'^2}\cos(it+D') \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} D' = \frac{Q'}{P'};$$

nous aurons alors pour X,

$$X = \frac{A}{k}\sqrt{\frac{e^{2pa-2px}+e^{2px-2pa}-2\cos(2qa-2qx)}{(p^2+q^2)(e^{2pa}+e^{-2pa}+2\cos 2qa)}}\cos(it+D').$$

Le moment où l'eau a son plus grand déplacement horizontal, ou l'instant où le flot cesse pour faire place au jusant, est $t'' = -\frac{D'}{i}$; nous voyons donc que la fin du flot a lieu à un temps $-\frac{1}{i}(D+D')$ après la haute mer. Calculons cette quantité; nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}(D+D') &= \frac{P'Q+PQ'}{PP'-QQ'} \\ &= \frac{-(e^{2pa-2px}-e^{2px-2pa}+2\sin(2qa-2qx)\operatorname{tang}(E-G))}{(e^{2pa-2px}-e^{2px-2pa})\operatorname{tang}(E-G)+2\sin(2qa-2qx)}; \end{aligned}$$

or

$$\operatorname{tang}(E - G) = \frac{p}{q},$$

d'où

$$-\operatorname{tang}(D + D') = \frac{q\left(e^{2pa-2px} - e^{2px-2pa}\right) - 2p\sin(2qa - 2qx)}{p\left(e^{2pa-2px} - e^{2px-2pa}\right) + 2q\sin(2qa - 2qx)}.$$

Le second membre étant toujours positif, la fin du flot a lieu après la haute mer; cet intervalle, qui est très-grand près de l'embouchure, diminue beaucoup près du barrage. Ces résultats, complétement d'accord avec l'observation, sont, comme on le voit, bien différents de ceux que nous avons obtenus au n° **18**, où nous avions négligé le frottement; ceux-ci cependant, ainsi que tous ceux que nous avions obtenus précédemment, doivent être étudiés en première analyse comme donnant le caractère général de la marée dans chaque cas considéré, le frottement s'y introduisant pour ainsi dire comme terme de correction, sans en modifier le caractère essentiel.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME SÉRIE. — TOME I.

Pages

Sur la stabilité de l'équilibre d'un solide pesant posé sur un appui courbe; par M. *Camille Jordan*. 7

De la résistance au choc d'une chaîne à maillons plats; par M. *H. Resal*. . . . 43

Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions; par M. *A. Mannheim* 57

Sur la méthode des moindres carrés; par M. *H. Laurent*. 75

Sur de prétendues inadvertances, dans lesquelles Lagrange serait tombé, suivant Poinsot, relativement à deux points fondamentaux de la Mécanique analytique; par M. *Breton (de Champ)*. 81

Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique; par M. *Laguerre*. 99

Recherches sur la dispersion des éléments d'un obus à balles après l'explosion; par M. *H. Resal*. 121

Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable; par M. *Charles Brisse* (suite et fin). 141

Réponse à l'article intitulé : « Sur de prétendues inadvertances dans lesquelles Lagrange serait tombé, etc.; » par M. *J. Bertrand*. 181

Mémoire sur des formules de perturbation; par M. *Émile Mathieu*. 183

Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet; par M. *E. Catalan*. 209

Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre; par M. *Allégret*. 241

Réponse à la Note de M. J. Bertrand relative à l'article : « Sur de prétendues inadvertances de Lagrange »; par M. *P. Breton (de Champ)*. 263

Sur les singularités des courbes de quatrième classe; par M. *Laguerre*. 265

Mémoire sur le problème des trois corps; par M. *Allégret*. 277

Sur certains nombres complexes compris dans la formule $a + b\sqrt{-c}$; par le P. *Pepin*, S. J. 317

Mémoire sur les fonctions de Legendre; par M. *Laurent*. 373

De la propagation des marées dans les rivières. Traduit et extrait des *Tides and Waves* de M. *H. Airy* par M. *Paul Guieysse*. 399

ERRATA.

Page 279, ligne 1, *au lieu de* fraction, *lisez* fonction.

Page 289, ligne 10, *au lieu de* ω, ω_1, *lisez* ω_1, ω_2....

Page 296, ligne 3, *au lieu de* $\sum_{i=1}^{i=n-1}$, *lisez* $\sum_{i=0}^{i=n-1}$.

Page 296, ligne 4, *au lieu de* $\frac{\partial g}{\partial g'_i}$, *lisez* $\frac{\partial g}{\partial y'_i}$.

Page 301, dernière ligne, et page 302, première ligne, *au lieu de* x, y et z et, *lisez* x_1, y_1, et z_1 en.

Page 311, ligne 2, *au lieu de* $\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \sigma'$, *lisez* $\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \sigma'$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

QA
1
J684
sér.3
t.1
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY